MINIMIZACIÓN POR EL MÉTODO SIMPLEX EN CONTENIDOS GRASOS Y SUS RESPECTIVOS COSTOS EN DIETA NORMAL SERVIDAS EN EL HOSPITAL NACIONAL CAYETANO HEREDIA

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

NELLY KAU KAU

LIMA - PERÚ

2018

ASESOR DE LA TESIS

MSc. Jaime García Sócola

JURADOS

PRESIDENTE

PhD. Juvenal Castromonte Salinas

VOCAL

PhD. César Cárcamo Cavagnaro

SECRETARIO

PhD. Mirko Zimic Peralta

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Jaime García Sócola, quien con su constante insistencia y preocupación, ésta tesis fue posible realizarlo.

A la Nutricionista Yianina Rojas por la ayuda incondicional en proporcionar los datos del Hospital Nacional Cayetano Heredia.

FUENTES DE FINANCIAMIENTO

Tesis Autofinanciada

Tabla de Contenidos

Resumen

Asociado a cada problema lineal existe otro problema de programación lineal denominado problema dual. Este último posee importantes propiedades y relaciones notables con respecto al problema lineal original, denominado primal.

Los modelos de programación lineal (minimización o maximización) aplicados en la planeación de dietas, consisten en una función lineal que satisface a un conjunto de restricciones lineales de desigualdad. A partir de los menús del Hospital Nacional Cayetano Heredia se obtiene las dietas. Para ello usaremos el método simplex matricial el que empieza en alguna solución factible inicial, ésta es una esquina del conjunto factible S originario. Cada iteración nos lleva a otra esquina de S por lo general con un valor mejorado de la función objetivo. También usaremos el método simplex tabular basado en el método de eliminación de Gauss – Jordan.

Cuando las variables y restricciones sobrepasan las tres dimensiones las soluciones requieren grandes cantidades de operaciones, razón por la cual es preferible recurrir a los programas LINGO o EXCEL. En éstos programas de uso generalizado los métodos anteriormente mencionados se ejecutan incorporando análisis de sensibilidad lo que nos ayuda en la toma de decisiones.

En ésta tesis se formula el problema de la dieta del Hospital Nacional Cayetano Heredia como un problema de programación lineal, se analiza la

factibilidad y optimalidad. Terminada ésta primera etapa, se traduce a un código de programación (LINGO o EXCEL), se ejecuta y se obtienen las soluciones numéricas. Estas soluciones se analizan tanto en su consistencia interna como en la viabilidad de su ejecución en el Hospital Nacional Cayetano Heredia. Además se estudia la sensibilidad de los parámetros como medida conducente a tomar decisiones adecuadas en un tiempo mínimo.

Abstract

Associated with each linear problem there is another linear programming problem called the dual problem. The latter has important properties and remarkable relations with respect to the original linear problem, called primal.

The models of linear programming (minimization or maximization) applied in the planning of diets, consist of a linear function that satisfies a set of linear constraints of inequality. From the menus of the National Hospital Cayetano Heredia you get the diets. To do this we use the matrix simplex method that starts in some initial feasible solution, this is a corner of the feasible set S originating. Each iteration takes us to another corner of S usually with an improved value of the objective function. We will also use the simplex tabular method based on the Gauss-Jordan elimination method.

When the variables and restrictions exceed the three dimensions the solutions require large amounts of operations, which is why it is preferable to use the LINGO or EXCEL programs. In these programs of widespread use the above mentioned methods are executed by incorporating sensitivity analysis which helps us in decision making.

In this thesis the problem of the diet of the National Hospital Cayetano Heredia is formulated as a problem of linear programming, the feasibility and

optimality are analyzed. Once this first stage is finished, it is translated into a programming code (LINGO or EXCEL), executed and the numerical solutions are obtained. These solutions are analyzed both in their internal consistency and in the feasibility of their execution at the Cayetano Heredia National Hospital. In addition, the sensitivity of the parameters is studied as a measure leading to making adequate decisions in a minimum time.

I. Introducción

En el año 2016, el 20.7% de la población del país, que equivale en cifras absolutas a 6 millones 518 mil personas, se encontraban en situación de pobreza, es decir, tenían un nivel de gasto inferior al costo de la canasta básica de consumo compuesto por alimentos y no alimentos (vivienda, vestido, educación, salud, transporte, etc.).

Alimentarse tiene un costo y en el Perú es elemental contar con S/328.00, costo promedio mensual, para acceder a la canasta básica de alimentos.

Los mayores niveles de pobreza se registraron en la Sierra rural (47.8 %), en la Selva rural (39.3 %) y en la Costa rural (28.9 %).

Los departamentos con mayor incidencia de pobreza fueron Cajamarca y Huancavelica, cuya nivel de pobreza se situó en 43.8% y 50.9%, respectivamente.

En el transcurso de los años los malos hábitos alimenticios han sido uno de los problemas a nivel nacional, trayendo como consecuencia malnutrición y/o sobre peso.

El consumo de nutrientes adecuados en cada etapa del desarrollo y crecimiento de una persona mejora su capacidad física e intelectual, en consecuencia mejora su productividad.

Una buena nutrición no depende en gran medida de un sustento económico, comer saludable a un costo mínimo es una opción que favorecen a todas las persona. La adecuada asignación de nutrientes coopera en la recuperación del paciente.

El presente estudio tuvo como objetivo establecer el costo mínimo en una dieta normal con valores nutricionales requeridos, minimizando además la cantidad de grasa.

Para tal fin, se usó datos que fueron obtenidos de un menú completo que incluye desayuno, almuerzo y cena del Hospital Nacional Cayetano Heredia.

II. Planteamiento del problema

II.1. Antecedentes

Durante la Segunda Guerra Mundial, fueron necesarios grandes esfuerzos bélicos los que requerían de manera eficaz la distribución de grandes recursos que permitieran las maniobras militares, así como otras actividades que componían cada operación militar. Por ésta razón los administraciones militares estadounidenses y británicas llamaron a un gran número de científicos quienes aplicaron diversos métodos matemáticos en la búsqueda de soluciones prácticas a éstos problemas tácticos, estratégicos y logísticos.

El nombre de programa no está asociado de manera alguna con un programa de ordenador, de hecho, para la época esto hubiera sido imposible. Dado que en la fuerza aérea los planes y proyectos a implementar son llamados *programas*, Dantzig solía referirse a los problemas de programación lineal como «programa en una estructura lineal», y no fue hasta 1948 que el matemático Koopmans acuñó el término «programación lineal».

El método simplex fue desarrollado por el físico y matemático estadounidense George Bernard Dantzig (considerado como el padre de la Programación Lineal), la cual era un algoritmo para resolver problemas de programación lineal de dos o más variables. Este algoritmo fue elegido como uno de los diez algoritmos más importantes del siglo XX.

II.2. Justificación

El método simplex es una herramienta importante para la toma de decisiones, para ser usada en un ambiente de incertidumbre, es un proceso iterativo que puede generar varias aproximaciones a la solución a través de distintas tablas de solución. Se puede identificar cuando se ha llegado a la solución óptima del modelo.

Se planteará un modelo matemático de dieta normal con los valores nutricionales que deben ingerirse bajo ciertas condiciones de nutrición minimizando el coste de compra de los nutrientes y además minimizando la cantidad de grasa. Los datos son obtenidos en uno de los 30 menús que se sirven durante cada día del mes en el Hospital Nacional Cayetano Heredia.

III. Marco Teórico

La programación lineal, que trata exclusivamente con funciones objetivos y restricciones lineales, es una parte de la programación matemática, y una de las áreas más importantes de las matemáticas aplicadas. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra programación es sinónimo de planificación y no se refiere al acto de programar computadoras. Por lo tanto, la programación lineal involucra la planificación de actividades para obtener un resultado óptimo. Para ello, se dispone de un procedimiento de solución muy eficiente llamado método simplex.

Un problema de programación lineal está compuesto por una función objetivo y un conjunto de restricciones. Asumiendo que cada restricción contiene n variables (x_1, x_2, … ,x_n) se tiene:

Máx (o Mín) $\qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

s.a

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq ó \geq ó = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq ó \geq ó = b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq ó \geq ó = b_m \\
&x_i \geq 0 \quad \forall_i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
$$

El Problema de programación lineal así formulado puede ser expresado mediante la introducción de variables de holgura, en lo que se llama la forma estándar la que puede escribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + h_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + h_2 = b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + h_m = b_m
\end{aligned}
$$

Donde las variables h_i representan las variables de holgura.

En forma matricial lo anteriormente expuesto se representa a continuación:

Max (o Min) $\qquad z = c^T x$

s.a

$$
\begin{aligned}
&Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

esto puede ser escrito como

$$
\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}
$$

Donde, x_s son las variables de holgura introducidas en el proceso de eliminación.

x, b, c son vectores columna.

A es la matriz coeficiente.

Este es el primer paso del método simplex. Una vez ejecutado el primer paso, se expresa la matriz A y el vector x descompuestos en variables básicas y no básicas tenemos:

$A = [B \quad N]; \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ luego $Ax = b$ se puede escribir como $[B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$ o bien $Bx_B + Nx_N = b$ La función objetivo sería

$z_B = [c_B \quad c_N]\begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = c_B x_B$ donde $x_B \geq 0$

Si hacemos $x_N = 0$, $Ax = b$ se convierte en $Bx_B = b$ cuya solución es: $\overline{x_B} = B^{-1}b$

Supongamos que $B^{-1}b \geq 0$ de manera que $\begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución básica factible.

La función objetivo puede expresarse como $\overline{z_B} = [c_B \; c_N]\begin{bmatrix} \overline{x_B} \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1} b$

Se sabe que $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ llamando $Y = B^{-1}N$ tenemos $x_B + Yx_N = B^{-1}b = \overline{x_B}$

Esto quedaría expresado como $c_B x_B + c_B Y x_N = c_B \overline{x_B}$ restando $z = c_B x_B + c_N x_N$ de la ecuación anterior tenemos $(c_N - c_B Y)x_N = z - \bar{z} \Rightarrow z = \bar{z} + \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$ donde $Y = \lfloor y_j \rfloor_{j \in J} = \lfloor y_{sj} \rfloor_{s \in I,\; j \in J}$

(Hillier,F.,Lieberman,G.,2010,p.162)

Definición 1

Se puede reordenar las columnas de la matriz A de la forma que $A=\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix}$ donde B es una matriz invertible de dimensiones m x m, entonces el punto $x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ donde $x_B = B^{-1}b$ y $x_B = 0$ se llama solución básica. Si además de ello, cumple que $x_B \geq 0$, se dirá que la solución es básica factible. (Chavez. A., p.18)

Definición 2

Una submatriz no singular B de dimensión m x m de A se denomina matriz básica. B también se denomina matriz básica factible si y solo si $B^{-1}b \geq 0$

Definición 3

Dada una matriz base B formada por m columnas de la matriz A, se dice que x_B es solución básica si verifica $Bx_B = b$. Todas las componentes no básicas son ceros. Por lo tanto, una solución básica tiene como máximo m componentes distintas de cero. Si además, x_B tiene todas sus componentes no negativas se dice que es solución básica factible.

Teorema 1

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar, donde A es una matriz m x n, y el rango de A es m, se tiene:

a) Si existe una solución posible, también existe una solución posible básica.

b) Si el problema tiene una solución posible óptima, entonces también tiene una solución posible básica óptima. (Luenberger D., Ye y., 2016, p.21)

Teorema 2

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar, donde *A* es una matriz m x n de rango m y b un vector m. Sea F el politopo convexo que consiste en todos los n – vectores x que satisface

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Un vector *x* es solución básica factible si y sólo si *x* es un punto extremo de F. (Luenberger D., Ye y., 2016, p.23)

Teorema 3

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar

Máx (o Mín) $z = c^T x$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

El valor óptimo de la función objetivo se encuentra en un punto extremo del conjunto F.

Teorema 4

Sea $S = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$, donde *A* es una matriz m x n de rango m, y *b* es un vector de dimensión m. Un punto *x* es punto extremo *S* si y sólo si

A puede descomponerse en $[B \quad N]$ tal que $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ donde B es una matriz de dimensión m x m invertible que satisface $B^{-1}b \geq 0$ (Bazaraa M.,et al, 1993, p.70)

Definición 4

Considere el sistema $Ax = b \quad y \quad x \geq 0$ en donde A es una matriz m × p y *b* es un vector m. Suponga que el rango (A,b) = rango (A) = m.

Después de un posible reordenamiento de las columnas de *A*, sea $A = [B, \quad N]$, en donde *B* es una matriz invertible de m x m y *N* es una matriz de m x (n-m). La solución $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ de las ecuaciones $Ax = b$, en donde $x_B = B^{-1}b \quad y \quad x_N = 0$

Se denomina solución básica del sistema. Si $x_B \geq 0$, entonces x se denomina solución básica factible del sistema. Aquí, *B* se denomina matriz básica y *N* se denomina matriz no básica. Los componentes de x_B se denomina variables básicas (o variables dependientes), y las componentes x_N se llaman variables no básicas (o variables independientes). Si $x_B > 0$, entonces x se denomina solución básica factible no degenerada, y si por lo menos una componente de x_B es igual a cero, entonces x se denomina solución básica degenerada. (Bazaraa M.,et al, 1999, p.99)

Criterios del método simplex

1. Criterio de óptimo.- La condición necesaria y suficiente para que una solución básica factible asociada a una base *B* sea óptima es: $\forall j \in J\left(z_j - c_j\right) \geq 0$

2. Criterio de entrada.- Se introduce la variable x_k tal que $\left|z_k - c_k\right| = máximo\left\{\left|z_j - c_j\right|; \left(z_j - c_j\right) < 0\right\}$

3. Criterio de salida.- Si x_k es la variable de entrada, la de salida será la x_l que cumpla $\frac{\overline{x_l}}{y_{lk}} = mínimo\left\{\frac{\overline{x_s}}{y_{sk}}; y_{sk} > 0 / s \in I\right\}$

4. Criterio de no acotación.- $\exists k \in J / \left(z_j - c_j\right) < 0 \; con \; y_k < 0$ (Barazza M., 1999, p.128)

Proposición 1

El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Proposición 2

Si *K* es un poliedro convexo, entonces la función objetivo *z* alcanza un mínimo en un vértice de K.

Proposición 3

Si tenemos un conjunto de *K* vectores $A_1, A_2, ..., A_k$, que sean linealmente independientes y de forma que: $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = b$ con las $x_i \geq 0$, entonces, el punto $X = \left(x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0\right)^T$ es un vértice del conjunto convexo K de soluciones factibles. (Martin Q, 2011, p.38)

Definición 5

Un conjunto S en R^n se dice que es convexo si y sólo si $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$ para todo $\lambda \in [0,1]$ $y\ x, y \in S$ (Castillo E., et al, 2002, p.104)

El método simplex tabular se desarrolla con el siguiente algoritmo, la cual es una secuencia de pasos lógicos que siempre se realizan en el mismo orden. Partiendo de un modelo de programación lineal en su forma estándar se realiza los siguientes pasos:

Paso 1. Convertir las desigualdades en igualdades al sumarles una variable de holgura h_i. Esta variable representa la cantidad que le falta a la desigualdad para ser igualdad. Las variables de holgura siempre son positivas. No se incluye las condiciones de no negatividad.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + h_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + h_2 = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + h_m = b_m \end{array}$$

Paso 2. Escribir la función objetivo como una igualdad a cero sumando las variables de holgura h_i con coeficiente cero y conservando positivo el coeficiente de Z.

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + 0h_1 + 0h_2 + \ldots + 0h_m = 0$$

Paso 3. Formar la tabla simplex

Variables Básicas	z	x_1	x_2	………………	x_n	h_1	h_2	…………	h_m	Solución
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$-$……… ……	$-c_n$	0	0	……… ………	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}	……………	a_{1n}	1	0	………………	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}	……………	a_{2n}	0	1	………………	0	b_2
.	.	.								.
.	.	.								.
.	.	.								.
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}	……………	a_{mn}	0	0	………………	1	b_m

En la primera fila se escribe las variables básicas; la función objetivo *z*; las variables originales del modelo, seguidas de las variables de holgura y por último solución.

En la segunda fila contiene los coeficientes, correspondientes a cada variable original, de la función objetivo escrito como se obtuvo en el paso 2 y con el coeficiente cero para todas las variables de holgura y la solución.

En la primera columna y a partir de la tercera fila se coloca verticalmente todas las variables de holgura empleadas. También a partir de la tercera fila se colocan los coeficientes de cada una de las restricciones en la columna de la variable correspondiente (esto genera los componentes de una matriz identidad en las variables de holgura).

En la columna solución se colocan los términos independientes y además identificamos un elemento pivote.

Paso 4. Verificamos si todos los coeficientes asociados a la fila de *z* son mayores o iguales a cero. Si es así, entonces la solución en la tabla es la óptima y el proceso termina. Si no es así, se continúa.

Paso 5. El elemento pivote se obtiene de los coeficientes de la fila *z* se toma el menor valor y se selecciona toda la columna, se divide la columna solución entre el elemento correspondiente de la columna seleccionada, y de los resultados de la división se selecciona el menor valor positivo y toda fila asociada a este valor. Las divisiones entre cero o entre valores negativos no se toman en cuenta. Si todas son negativas o indeterminadas el problema no tiene solución y el proceso termina. El elemento pivote con el método de eliminación de Gauss-Jordan usando las operaciones de filas se convierte en 1, y todos los elementos de es columna se convierte en cero.

Paso 6. Se repite el proceso desde el paso 4 operando sobre matrices hasta obtener todos los coeficientes de la fila *z*, con valores mayores o iguales a cero. (Haeussler,P.,2017,p.314)

Definición 6

Columna unitaria – Si una de las entradas en la columna es 1 y las otras entradas son ceros. (Soo,T.,2010,p.254)

Notación para las operaciones de filas

Sea R_i que denota el iésima fila de una matriz, escribimos:

Operación1. $R_i \leftrightarrow R_j$ Intercambio de filas

Operación 2. cR_i *c* veces la fila *i*

Operación 3. $R_i + aR_j$ Sustituir la fila *i* con la suma de la fila *i* y a veces la fila *j*

(Soo,T.,2010,p.255)

El método dual – simplex se desarrolla partiendo de un modelo con el objetivo de minimizar, se utiliza la tabla primal – dual para trasladar el problema a maximización o viceversa. Para formar la tabla primal – dual se realiza la siguiente secuencia:

1. El tamaño de la tabla es de m+2 renglones y n+2 columnas. (n número de variables y m número de restricciones del problema primal)
2. La celda de la esquina superior izquierda se divide en 2 con una diagonal en la parte superior escribimos la palabra primal y dual. En la primera fila, las variables del problema primal (n variables) ya continuación el símbolo <= (máx) ó >= (mín).
3. Los coeficientes de la función objetivo del modelo primal en la última fila. Los coeficientes de las restricciones en las siguientes filas.
4. La última columna las cantidades limitantes de las restricciones del modelo primal.

5. El modelo primal se lee en forma vertical y el modelo dual en forma horizontal.

Primal Dual	$x_1 \quad x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_n$	$\geq$
y_1 y_2 . . . y_m		
$\leq$		

(Hillier,F.,Lieberman,G.,2010,p.181)

Definición 7

Dado el problema de programación lineal minimizar

$$z = c^T x$$

Sujeto a

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Su problema dual es maximizar

$$z = b^T y$$

Sujeto a

$$A^T y \leq c$$
$$y \geq 0$$

Donde $y = (y_1, \ldots, y_m)^T$ se denominan variables duales.

La dualidad es una relación simétrica, esto es, si el problema D es el dual del problema P, entonces P es el dual de D. Para comprobar esto, se escribe el problema dual anterior como un problema de minimización con restricciones de la forma >=.

Minimizar

$$z = -b^T y$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} &-A^T y \geq -c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, su dual es maximizar

$$z = -c^T x$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} &-Ax \leq -b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

que es equivalente al problema primal original. (Hillier,F.,Lieberman,G.,2010,p.180)

Teorema 5

Sea P un problema primal de programación lineal, y D su dual. Sea *x* una solución factible de P e *y* una solución factible de D. Entonces (Castillo E., et al, 2002, p.89)

$$b^T y \leq c^T x$$

Teorema 6

Dados un par de problemas primal – dual, si uno de ellos admite solución óptima, entonces el otro también la admite y los respectivos valores óptimos son iguales.

El análisis de sensibilidad consiste en determinar cuál es el rango de variación de los parámetros del problema de modo que la base óptima encontrada siga siendo óptima.

Consideremos la forma estándar Máx (o Mín) $z = c^T x$

$Ax \leq ó \geq b$
$x \geq 0$

Sea *B* la base óptima, analizando la variación del parámetro *b* y *c*, de modo que *B* siga siendo óptima.

Para ello se debe verificar, la factibilidad $x_B = B^{-1}b \geq 0$ y la optimalidad $\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$ (Taha,A.,2012,p.80)

IV. Objetivos

IV.1.Objetivo General

Determinar la solución óptima del problema de minimización de costos y sus contenidos grasos de un menú completo, servidas en el Hospital Nacional Cayetano Heredia.

IV.2. Objetivos específicos

1. Determinar la factibilidad y optimalidad del problema de programación lineal en el entorno del problema de las dietas.
2. Analizar el beneficio, a través de un análisis pos óptimo de la solución óptima hallada.

V. Metodología

Se analizan dos casos:

V.1. **Caso 1**

V.1.1 Definición del problema de interés.

Para ilustrar el problema de interés se analiza un sistema de tres variables con dos restricciones, desarrollado por el método simplex matricial y tabla.

El problema de programación lineal consiste en una función objetivo lineal que será minimizada, sujeta a ciertas restricciones en forma de desigualdades.

Función Objetivo: min $z = 18y_1 + 42y_2 + 24y_3$

s.a:

$$\begin{aligned} &2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ &y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

V.1.2 Desarrollo de un procedimiento basado en el método simplex matricial.

Debido a que el problema de programación lineal es un sistema de tres variables con 2 restricciones, usando el método simplex dual (tabla primal - dual), se convertirá en un sistema de 2 variables y tres restricciones, lo cual es más sencillo para su desarrollo.

Lo que se tiene:

Primal / Dual	y_1	y_2	y_3	$\geq$
x_1	2	2	3	3
x_2	1	3	1	2
$\leq$	18	42	24	

Función Objetivo: máx $z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.a:} \quad \begin{aligned} &2x_1 + x_2 \leq 18 \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ &3x_1 + x_2 \leq 24 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para el **método simplex matricial**, se transcribe tanto la función objetivo como las restricciones en un sistema matricial.

Lo cual sería

$$c^T = [3\ 2\ 0\ 0\ 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2\,1\,1\,0\,0 \\ 2\,3\,0\,1\,0 \\ 3\,1\,0\,0\,1 \end{bmatrix}; \quad x^T = [x_1\ x_2\ h_1\ h_2\ h_3]; \quad b = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Partiremos de una base inicial e iremos pasando en sucesivas iteraciones por bases hasta alcanzar el óptimo.

Sea la base inicial B_1 formada por las columnas h_1, h_2, h_3 de la matriz A, una vez formada la base inicial, se halla su inversa que es B_1^{-1}

Luego se determina las variables $x_{B_1}, y_{x_1}, y_{x_2}$ para poder encontrar los criterios óptimos $z_{x_1} - c_{x_1}$ y $z_{x_2} - c_{x_2}$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}; \quad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}; \quad x_{B_1} = B_1^{-1} b = \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$y_{x_1} = B_1^{-1} x_1 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow z_{x_1} = c_{B_1} y_{x_1} = \begin{bmatrix} 0\;0\;0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$y_{x_2} = B_1^{-1} x_2 = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow z_{x_2} = c_{B_1} y_{x_2} = \begin{bmatrix} 0\;0\;0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$z_{x_1} - c_{x_1} = 0 - 3 = -3$$

$$z_{x_2} - c_{x_2} = 0 - 2 = -2$$

Como los criterios óptimos son negativos, entonces se introduce el criterio de entrada, lo cual es hallar el $\max\left\{ \left| z_{x_1} - c_{x_1} \right| ; \left| z_{x_2} - c_{x_2} \right| \right\} = \{3;2\} = 3$ esto quiere decir que entra x_1 a la base y el criterio de salida que es el

$$\min\left\{ \frac{h_1}{y_{x_{11}}}, \frac{h_2}{y_{x_{12}}}, \frac{h_3}{y_{x_{13}}} \right\} = \left\{ \frac{18}{2}, \frac{42}{2}, \frac{24}{3} \right\} = 8$$

esto quiere decir que deja h_3 a la base.

Por lo tanto

$$z = c_{B_1} x_{B_1} = \begin{bmatrix} 0\;0\;0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} = 0$$

Realizando entonces la primera iteración con la base B_2 formada por las columnas h_1, h_2, x_1 de la matriz A, una vez formada la base, se halla su inversa que es B_2^{-1}

Luego se determina las variables $x_{B_2}, y_{x_2}, y_{h_3}$ para poder encontrar los criterios óptimos $z_{x_2} - c_{x_2}$ y $z_{h_3} - c_{h_3}$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,1\,2 \\ 0\,0\,3 \end{bmatrix}; \quad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1\,0 - 0{,}6667 \\ 0\,1 - 0{,}6667 \\ 0\,0\ \ 0{,}3333 \end{bmatrix}; \quad x_{B_2} = B_2^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 26 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_{x_2} = B_2^{-1} x_2 = \begin{bmatrix} 1\,0 - 0{,}6667 \\ 0\,1 - 0{,}6667 \\ 0\,0\ \ 0{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 2{,}333 \\ 0{,}333 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{x_2} = c_{B_2} y_{x_2} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 2{,}333 \\ 0{,}333 \end{bmatrix} = 0{,}999$$

$$y_{h_3} = B_2^{-1} h_3 = \begin{bmatrix} 1\,0 - 0{,}6667 \\ 0\,1 - 0{,}6667 \\ 0\,0\ \ 0{,}3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6667 \\ -0{,}6667 \\ 0{,}3333 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{h_3} = c_{B_2} y_{h_3} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}6667 \\ -0{,}6667 \\ 0{,}3333 \end{bmatrix} = 0{,}9999$$

$$z_{x_2} - c_{x_2} = 0{,}999 - 2 = -1{,}001$$

$$z_{h_3} - c_{h_3} = 0{,}999 - 0 = -0{,}999$$

Como los criterios óptimos son negativos, entonces se introduce el criterio de entrada, lo cual es hallar el $\max\left\{\left|z_{x_2} - c_{x_2}\right|; \left|z_{h_3} - c_{h_3}\right|\right\} = 1{,}001$ esto quiere decir que entra x_2 a la base y el criterio de salida que es el

$$\min\left\{\frac{h_1}{y_{x_{21}}}, \frac{h_2}{y_{x_{22}}}, \frac{x_1}{y_{x_{23}}}\right\} = \left\{\frac{2}{0{,}333}, \frac{26}{2{,}333}, \frac{8}{0{,}333}\right\} = 6$$

esto quiere decir que deja h_1 a la base.

Por lo tanto $z = c_{B_2} x_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 26 \\ 8 \end{bmatrix} = 24$

Realizando la segunda iteración con la base B_3 formada por las columnas x_2, h_2, x_1 de la matriz A, una vez formada la base, se halla su inversa que es B_3^{-1}

Luego se determina las variables $x_{B_3}, y_{h_1}, y_{h_3}$ para poder encontrar los criterios óptimos $z_{h_1} - c_{h_1}$ y $z_{h_3} - c_{h_3}$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad x_{B_3} = B_3^{-1} b = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$y_{h_1} = B_3^{-1} h_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{h_1} = c_{B_3} y_{h_1} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$y_{h_3} = B_3^{-1} h_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{h_3} = c_{B_3} y_{h_3} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$z_{h_1} - c_{h_1} = 3 - 0 = 3$$
$$z_{h_3} - c_{h_3} = -1 - 0 = -1$$

Como en los criterios óptimos existe todavía valores negativos, entonces se introduce el criterio de entrada, lo cual es hallar el $\max\left\{ \left| z_{h_1} - c_{h_1} \right| ; \left| z_{h_3} - c_{h_3} \right| \right\} = 1$ esto quiere decir que entra h_3 a la base y el criterio de salida que es el

$$\min\left\{ \frac{x_2}{y_{h_{3_1}}}, \frac{h_2}{y_{h_{3_2}}}, \frac{x_1}{y_{h_{3_3}}} \right\} = \left\{ \frac{6}{-2}, \frac{12}{4}, \frac{6}{1} \right\} = 3$$

esto quiere decir que deja h_2 a la base.

Por lo tanto $z = c_{B_3} x_{B_3} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$

Vemos que cada paso que realiza la iteración mejora la solución.

Realizando la tercera iteración con la base B_4 formada por las columnas x_2, h_3, x_1 de la matriz A, una vez formada la base, se halla su inversa que es B_4^{-1}

Luego se determina las variables $x_{B_4}, y_{h_1}, y_{h_2}$ para poder encontrar los criterios óptimos $z_{h_1} - c_{h_1}$ y $z_{h_2} - c_{h_2}$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1\,0\,2 \\ 3\,0\,2 \\ 1\,1\,3 \end{bmatrix}; \quad B_4^{-1} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ -1,75 & 0,25 & 1 \\ 0,75 & -0,25 & 0 \end{bmatrix}; \quad x_{B_4} = B_4^{-1} b = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_{h_1} = B_4^{-1} h_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ -1,75 & 0,25 & 1 \\ 0,75 & -0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,75 \\ 0,75 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{h_1} = c_{B_4} y_{h_1} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,75 \\ 0,75 \end{bmatrix} = 1,25$$

$$y_{h_2} = B_4^{-1} h_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ -1,75 & 0,25 & 1 \\ 0,75 & -0,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_{h_2} = c_{B_4} y_{h_2} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,25 \end{bmatrix} = 0,25$$

$$z_{h_1} - c_{h_1} = 1,25 - 0 = 1,25$$
$$z_{h_2} - c_{h_2} = 0,25 - 0 = 0,25$$

Observamos que ya no es posible mejorar por el criterio óptimo $\forall j \in J\left(z_j - c_j\right) \geq 0$

Por lo tanto $z = c_{B_4} x_{B4} = \left[2\ 0\ 3\right] \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 33$

Ahora es importante el estudio del rango de variación de los parámetros *b* (factibilidad) y *c* (optimalidad) de modo que *B* siga siendo óptima.

Sea *B* la base óptima $B = \begin{bmatrix} 2\,1\,0 \\ 2\,3\,0 \\ 3\,1\,1 \end{bmatrix}$

Hallando su inversa tenemos

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Hallando la factibilidad: $B^{-1} b \geq 0$

Para el parámetro b_1 se calcula de la forma siguiente:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 42 \\ 24 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 14 \leq b_1 \leq 19{,}71$$

De igual forma para el parámetro b_2:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ b_2 \\ 24 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 30 \leq b_2 \leq 54$$

Y el parámetro b_3:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 42 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 \geq 21$$

Hallando la optimalidad: $\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$

Para el parámetro c_1: x_1 es la básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\left(\overline{c_3}, \overline{c_4}\right) = \left(c_3, c_4\right) - \left(c_1, c_2, c_5\right) B^{-1} N \geq 0$$

$$= \left(0,0\right) - \left(-c_1, -2, 0\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} \leq c_1 \leq 4$$

Para el parámetro c_2: x_2 es la básica, entonces tenemos que considerar todos los costos reducidos.

$$\left(\overline{c_3},\overline{c_4}\right)=\left(c_3,c_4\right)-\left(c_1,c_2,c_5\right)B^{-1}N\geq 0$$

$$=\left(0,0\right)-\left(-3,-c_2,0\right)\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{-7}{4} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\leq c_2\leq\frac{9}{2}$$

V.1.3 Desarrollo de un procedimiento basado en el método simplex tabla

Para el **método simplex tabla**, se escribe la función objetivo como una igualdad a cero sumando las variables de holgura h_i con coeficiente cero y conservando positivo el coeficiente de z .

$$z-3x_1-2x_2+0h_1+0h_2+0h_3=0$$

Luego se llena una tabla de la siguiente forma:

En la primera fila se escribe las variables básicas; la función objetivo *z*; las variables originales del modelo, seguidas de las variables de holgura y por último solución.

En la segunda fila contiene los coeficientes, correspondientes a cada variable original, de la función objetivo y con el coeficiente cero para todas las variables de holgura y la solución.

En la primera columna y a partir de la tercera fila se coloca verticalmente todas las variables de holgura empleadas. También a partir de la tercera fila se colocan los coeficientes de cada una de las restricciones en la columna de la variable correspondiente (esto genera los componentes de una matriz identidad en las variables de holgura).

En la columna solución se colocan los términos independientes y además identificamos un elemento pivote.

Variables Básicas	z	x_1 x_2 h_1 h_2 h_3	Solución
z	1	-3 -2 0 0 0	0
h_1 h_2 h_3	0 0 0	2 1 1 0 0 2 3 0 1 0 3 1 0 0 1	18 42 24

Se determina el primer elemento pivote. El elemento pivote se obtiene de los coeficientes de la fila *z* que le asignamos con el nombre de R_o, donde se toma el menor valor y se selecciona toda la columna, se divide la columna solución entre el elemento correspondiente de la columna seleccionada, y de los resultados de la división se selecciona el menor valor positivo y toda fila asociada a este valor.

Las divisiones entre cero o entre valores negativos no se toman en cuenta. Si todas son negativas o indeterminadas el problema no tiene solución y el proceso termina. El elemento pivote con el método de eliminación de Gauss-Jordan usando las operaciones de filas se convierte en 1, y todos los elementos de es columna se convierte en cero.

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S	
R_0	z	1	-3	-2	0	0	0	0	
R_1	h_1	0	2	1	1	0	0	18	18/2
R_2	h_2	0	2	3	0	1	0	42	42/2
R_3	h_3	0	3	1	0	0	1	24	24/3

Operaciones de renglón, $\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3}$

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	-3	-2	0	0	0	0
R_1	h_1	0	2	1	1	0	0	18
R_2	h_2	0	2	3	0	1	0	42
R_3	h_3	0	1	1/3	0	0	1/3	8

Operaciones de renglón,

$$\xrightarrow{R_0+3R_3},\xrightarrow{R_1-2R_3},\xrightarrow{R_2-2R_3}$$

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	0	-1	0	0	1	24
R_1	h_1	0	0	1/3	1	0	-2/3	2
R_2	h_2	0	0	7/3	0	1	-2/3	26
R_3	h_3	0	1	1/3	0	0	1/3	8

Se determina el segundo elemento pivote, debido a que todavía en el R_o presenta valores negativos.

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S	
R_0	z	1	0	-1	0	0	1	24	
R_1	h_1	0	0	1/3	1	0	-2/3	2	2/(1/3)
R_2	h_2	0	0	7/3	0	1	-2/3	26	26/(7/3)
R_3	h_3	0	1	1/3	0	0	1/3	8	8/(1/3)

Operaciones de renglón, $\xrightarrow{3R_1}$

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	0	-1	0	0	1	24
R_1	h_1	0	0	1	3	0	-2	6
R_2	h_2	0	0	7/3	0	1	-2/3	26
R_3	h_3	0	1	1/3	0	0	1/3	8

Operaciones de renglón,

$$\xrightarrow{R_0+R_1}, \xrightarrow{R_2-\frac{7}{3}R_1}, \xrightarrow{R_3-\frac{1}{3}R_1}$$

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	0	0	3	0	-1	30
R_1	h_1	0	0	1	3	0	-2	6
R_2	h_2	0	0	0	-7	1	4	12
R_3	h_3	0	1	0	-1	0	1	6

Se determina el tercer elemento pivote, debido a que sigue presentando valor negativo en R_o.

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S	
R_0	z	1	0	0	3	0	-1	30	
R_1	h_1	0	0	1	3	0	-2	6	NN
R_2	h_2	0	0	0	-7	1	4	12	12/4
R_3	h_3	0	1	0	-1	0	1	6	6

Operaciones de renglón, $\xrightarrow{\frac{1}{4}R_2}$

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	0	0	3	0	-1	30
R_1	h_1	0	0	1	3	0	-2	6
R_2	h_2	0	0	0	-7/4	¼	1	3
R_3	h_3	0	1	0	-1	0	1	6

Operaciones de renglón,

$\xrightarrow{R_0+R_2}, \xrightarrow{R_1+2R_2}, \xrightarrow{R_3-R_2}$

Vemos que aquí termina la iteración, debido a que todos los coeficientes de la fila *z*, son valores mayores o iguales a cero.

	VB	z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
R_0	z	1	0	0	5/4	1/4	0	33
R_1	h_1	0	0	1	-1/2	1/2	0	12
R_2	h_2	0	0	0	-7/4	1/4	1	3
R_3	h_3	0	1	0	3/4	-1/4	0	3

El problema termina, ya que en R_0 todos los coeficientes son positivos. Observamos que la función objetivo es 33, $x_1 = 3$ y $x_2 = 12$.

Para analizar las sensibilidades de *b* y *c*, se determina con la última tabla desarrollada del método simple tabla.

Sensibilidad Independiente

Para calcular la sensibilidad de b_1 primero se deberá determinar el valor de θ y para eso se determina la fila donde la variable $x_1, x_2, h_3\ y\ z$ es uno, en esa fila el valor de la solución se le suma a la misma fila el valor de la columna h_1 .
Se resuelve todas las desigualdades mayores e iguales a cero.

x_1	$3+\frac{3}{4}\theta$	≥ 0
x_2	$12-\frac{1}{2}\theta$	
h_3	$3-\frac{7}{4}\theta$	
z	$33+\frac{5}{4}\theta$	

Lo que se obtiene $\theta \in [-4;1,71]$ Luego se cambia 18 por $18+\theta$, resultando $b_1 \in [14;19,71]$

Para calcular la sensibilidad de b_2 primero se deberá determinar el valor de θ y para eso se determina la fila donde la variable x_1, x_2, h_3 y z es uno, en esa fila el valor de la solución se le suma a la misma fila el valor de la columna h_2 . Se resuelve todas las desigualdades mayores e iguales a cero.

x_1	$3-\frac{1}{4}\theta$	≥ 0
x_2	$12+\frac{1}{2}\theta$	
h_3	$3+\frac{1}{4}\theta$	
z	$33+\frac{1}{4}\theta$	

Lo que se obtiene $\theta \in [-12;12]$ Luego se cambia 42 por $42+\theta$, resultando $b_2 \in [30;54]$

Para calcular la sensibilidad de b_3 primero se deberá determinar el valor de θ y para eso se determina la fila donde la variable x_1, x_2, h_3 y z es uno, en esa fila el valor de la solución se le suma a la misma fila el valor de la columna h_3 .

Se resuelve todas las desigualdades mayores e iguales a cero.

x_1	$3+0(\theta)$	≥ 0
x_2	$12+0(\theta)$	
h_3	$3+1(\theta)$	
z	$33+0(\theta)$	

Lo que se obtiene $\theta \in [-3;\infty[$ Luego se cambia 24 por $24+\theta$, resultando $b_3 \in [21;\infty[$

Sensibilidad Función Objetivo

Para calcular la sensibilidad de c_1 primero se deberá determinar el valor de θ y para eso se determina la fila donde la variable x_1 y z son unos, en esa fila se suma los dos valores de la misma posición de la columna h_1 y h_2. Se resuelve todas las desigualdades mayores e iguales a cero.

z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
1	1	0	$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\theta$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\theta$	0	$33+3\theta$
			≥ 0	≥ 0		

Lo que se obtiene $\theta \in \left[\frac{-5}{3};1\right]$ Luego se cambia 3 por $3+\theta$, resultando $c_1 \in [1{,}33;4]$

Para calcular la sensibilidad de c_1 primero se deberá determinar el valor de θ y para eso se determina la fila donde la variable x_2 y z son unos, en esa fila se suma los dos valores de la misma posición de la columna $h_1 \; y \; h_2$. Se resuelve todas las desigualdades mayores e iguales a cero.

z	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	S
1	0	1	$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\theta$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$	0	$33+12\theta$
			≥ 0	≥ 0		

Lo que se obtiene $\theta \in \left[\frac{-1}{2};2,5\right]$ Luego se cambia 2 por $2+\theta$, resultando $c_2 \in [1,5;4,5]$

V.2 **Caso 2**

V.2.1 Definición del problema de interés.

En este caso se va a subdividir en 2 problemas de interés.

Caso 2 A

Minimizar el costo de una comida completa, con los requerimientos nutricionales de una dieta saludable.

Caso 2 B

Minimizar el contenido de grasa de una comida completa, con los requerimientos nutricionales de una dieta saludable.

V.2.2 Recolección de datos.

Los datos de la tabla1 es el menú del desayuno con sus respectivos nutrientes proporcionados por el HNCH.

Tabla 1 Lista de alimentos servidos en el desayuno con sus respectivos nutrientes.

DESAYUNO										
ALIMENTO	PESO NETO (g)	KCAL	PROT (g)	LIP (g)	CHO (g)	GRASA SAT. (g)	GRASA POLIINS . (g)	GRASA MONOINS . (g)	FIBRA (g)	SODIO mg
	Leche									
Leche evaporada	100.0	133.00	6.30	7.70	10.90	3.98	0.34	2.36	0.00	180.00
SUB-TOTAL		190.00	6.30	7.70	25.48	3.98	0.34	2.36	0.00	180.90
	Quinua con durazno									
Quinua	15.0	51.15	1.37	0.39	10.82	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Durazno	20.0	12.80	0.12	0.02	3.42	0.00	0.00	0.00	0.12	0.60
Azúcar rubia	15.0	57.00	0.00	0.00	14.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.90
Canela	0.5	1.31	0.02	0.02	0.40	0.00	0.00	0.00	0.12	0.13
Clavo de olor	0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SUB-TOTAL		122.26	1.50	0.43	29.22	0.00	0.00	0.00	0.24	1.63
	Jugo de papaya con plátano									
Papaya	100	32.00	0.40	0.10	8.20	0.00	0.00	0.00	0.50	8.00
Platano de isla	20	18.20	0.18	0.08	4.72	0.03	0.02	0.01	0.10	0.20
Azúcar rubia	15.0	57.00	0.00	0.00	14.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.90
SUB-TOTAL		107.20	0.58	0.18	27.50	0.03	0.02	0.01	0.60	9.10
	Pan con huevo duro + Pan con palta									
Pan Francés	60.0	166.20	5.04	0.12	37.74	0.45	0.97	0.34	0.36	324.00
Huevo	50.0	70.50	6.75	4.20	0.90	1.51	0.47	1.98	0.00	70.00
Palta	40.0	52.40	0.68	5.00	2.24	0.62	0.45	3.93	2.32	0.80
SUB-TOTAL		289.10	12.47	9.32	40.88	2.57	1.88	6.25	2.68	394.80
TOTAL		**708.56**	**20.85**	**17.63**	**123.08**	**6.58**	**2.25**	**8.62**	**3.52**	**586.43**

	PROT(g)	LIP(g)	CHO(g)	GRASA SAT. (g)	GRASA POLIINS. (g)	GRASA MONOINS. (g)	FIBRA (g)	SODIO mg
TOTAL	20.85	17.63	123.08	6.58	2.25	8.62	3.52	586.43
TOTAL(KCAL.)	83.42	158.63	492.30	59.24	20.23	77.55		
TOTAL (%)	7.6%	22.4%	69.5%	8.4%	2.9%	10.9%		
Requerimientos Nutricionales	10-15%	15-30%	55-75%	<10%	6-10%		10-12.5	<2000mg
VCT DESAYUNO	708.56							

Fuente: Hospital Nacional Cayetano Heredia

Los datos de la tabla 2 es el menú del almuerzo con sus respectivos nutrientes proporcionados por el HNCH.

Tabla 2 Lista de alimentos servidos en el almuerzo con sus respectivos nutrientes.

ALMUERZO										
ALIMENTO	**PESO NETO (g)**	**KCAL**	**PROT (g)**	**LIP (g)**	**CHO (g)**	**GRASA SAT. (g)**	**GRASA POLIINS. (g)**	**GRASA MONOINS. (g)**	**FIBRA (g)**	**SODIO mg**
SOPA	**Sopa de sémola**									
Sémola	15.0	50.25	1.17	0.17	11.76	0.00	0.00	0.00	0.14	1.80
Pollo	20.0	23.80	4.28	0.62	0.00	0.22	0.10	0.29	0.00	16.20
Apio	15.0	3.15	0.11	0.03	0.72	0.00	0.00	0.00	0.15	21.00
Poro	15.0	6.00	0.41	0.12	1.14	0.00	0.00	0.00	0.20	1.35
Nabo	15.0	2.40	0.09	0.03	0.54	0.00	0.02	0.00	0.09	8.70
Zapallo	30.0	7.80	0.21	0.06	1.92	0.00	0.00	0.00	0.30	0.30
Zanahoria	15.0	6.15	0.09	0.08	1.38	0.00	0.00	0.00	0.18	14.25
Sal	2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	800.00
SUB-TOTAL		99.55	6.35	1.10	17.46	0.22	0.12	0.30	1.05	863.60
SEGUNDO	**Pescado a la chorrillana con yuca**									
Pescado	100.0	138.00	23.40	4.20	0.00	1.34	1.86	0.97	0.00	91.20
Cebolla	40.0	19.60	0.56	0.08	4.52	0.00	0.00	0.00	0.32	56.00
Tomate	30.0	5.70	0.24	0.06	1.29	0.00	0.00	0.00	0.24	0.90
Aji panca	1.0	2.92	0.07	0.08	0.59	0.00	0.00	0.00	0.22	0.03
Vinagre	5.0	1.05	0.00	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Pimienta negra	0.5	1.28	0.05	0.02	0.35	0.00	0.00	0.00	0.05	0.39
Cominos	0.5	1.88	0.09	0.11	0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Arroz	100.0	358.00	7.80	0.70	77.60	0.19	0.30	0.21	0.40	6.00
Aceite vegetal	15.0	132.60	0.00	15.00	0.00	2.09	12.65	0.05	0.00	0.00
Sal	2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	800.00
Yuca	100.0	162.00	0.80	0.20	39.30	0.00	0.00	0.00	1.10	0.00
Ajos	2.0	2.58	0.11	0.02	0.61	0.00	0.00	0.00	0.02	0.28
SUB-TOTAL		825.60	33.13	20.46	124.78	3.62	14.80	1.22	2.35	954.80
POSTRE	**Mandarina**									
Mandarina	150.0	52.50	0.90	0.45	12.90	0.00	0.00	0.00	0.75	3.30
SUB-TOTAL		52.50	0.90	0.45	12.90	0.00	0.00	0.00	0.75	3.30
REFRESCO	**Limonada**									
Limón	10.0	3.00	0.05	0.02	0.97	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20
Azúcar refinada	15.0	57.60	0.00	0.00	14.88	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SUB-TOTAL		60.60	0.05	0.02	15.85	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20
TOTAL		**1173.81**	**42.07**	**34.03**	**178.03**	**5.22**	**19.66**	**6.34**	**6.64**	**2283.96**

	PROT(g)	LIP(g)	CHO(g)	GRASA SAT. (g)	GRASA POLIINS. (g)	GRASA MONOINS. (g)	FIBRA (g)	SODIO mg
TOTAL	42.07	34.03	178.03	5.22	19.66	6.34	6.64	2283.96
TOTAL(KCAL.)	168.30	306.24	712.11	46.94	176.98	57.06		
TOTAL (%)	15.3%	26.1%	60.7%	4.0%	15.1%	4.9%		
Requerimientos Nutricionales	10-15%	15-30%	55-75%	<10%	6-10%		10-12.5	<2000mg
VCT ALMUERZO	1173.81							

Los datos de la tabla3 es el menú de la cena con sus respectivos nutrientes proporcionados por el HNCH.

Tabla 3 Lista de alimentos servidos en la cena con sus respectivos nutrientes.

CENA										
ALIMENTO	PESO NETO (g)	KCAL	PROT (g)	LIP (g)	CHO (g)	GRASA SAT. (g)	GRASA POLIINS. (g)	GRASA MONOINS. (g)	FIBRA (g)	SODIO mg
SEGUNDO	Adobo de cerdo con camote									
Chancho	100.0	198.00	14.40	15.10	0.10	6.42	1.25	7.23	0.00	76.00
Aji panca	5.0	14.60	0.35	0.39	2.93	0.00	0.00	0.00	1.12	0.15
Cebolla	20.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Pan francés	10.0	27.70	0.84	0.02	6.29	0.08	0.16	0.06	0.06	54.00
Camote	100.0	119.00	1.70	0.10	28.30	0.05	0.04	0.01	0.90	19.00
Arroz	100.0	358.00	7.80	0.70	77.60	0.19	0.30	0.21	0.40	6.00
Sal	2.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	800.00
Ajos	2.0	2.58	2.00	0.02	0.61	0.00	0.00	0.00	0.02	0.28
Aceite vegetal	5.0	44.20	0.00	5.00	0.00	0.70	4.22	0.02	0.00	0.00
SUB-TOTAL		764.08	27.09	21.33	115.82	7.43	5.97	7.52	2.50	955.43
POSTRE	Gelatina									
Gelatina	30.0	166.32	5.40	0.00	45.90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SUB-TOTAL		166.32	5.40	0.00	45.90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
REFRESCO	Maracuya									
Azúcar rubia	20.0	76.00	0.00	0.00	19.44	0.00	0.00	0.00	0.00	1.20
Maracuya	30.0	20.10	0.27	0.03	4.83	0.00	0.00	0.00	0.06	8.40
SUB-TOTAL		96.10	0.27	0.03	24.27	0.00	0.00	0.00	0.06	9.60
TOTAL		**1026.50**	**32.76**	**21.36**	**185.99**	**7.43**	**5.97**	**7.52**	**2.56**	**965.03**

	PROT(g)	LIP(g)	CHO(g)	GRASA SAT. (g)	GRASA POLIINS. (g)	GRASA MONOINS. (g)	FIBRA (g)	SODIO mg
TOTAL	32.76	21.36	185.99	7.43	5.97	7.52	2.56	965.03
TOTAL(KCAL.)	131.04	192.20	743.97	66.87	53.70	67.68		
TOTAL (%)	11.9%	18.7%	72.5%	6.5%	5.2%	6.6%		
Requerimientos Nutricionales	10-15%	15-30%	55-75%	<10%	6-10%		10-12.5	<2000mg
VCT CENA	1026.50							

Fuente: Hospital Nacional Cayetano Heredia

Los datos de la tabla 4 muestra la conversión de los alimentos cocidos a crudos.

Tabla 4 Lista de alimentos con el factor de conversión de alimentos cocidos a crudos.

Alimento		Peso Neto (g) Tamaño de porción	Factor de conversión de peso de alimentos cocidos a crudo[16][17]	Peso Bruto (g)
Desayuno				
Leche evap.		100		100
Quínua con durazno	Quinua	15	0.23	3.45
	Durazno	20		20
	Azúcar rubia	15		15
	Canela	0.5		0.5
	Clavo	0.5		0.5
Jugo de papaya con plátano	Papaya	100		100
	Plátano de isla	20		20
	Azúcar rubia	15		15
Pan con huevo duro y palta	Pan francés	60		60
	Huevo	50	1.04	52
	Palta	40		40
Almuerzo				
Sopa de sémola	Sémola	15	0.23	3.45
	Pollo	20	1.48	29.6
	Apio	15	0.99	14.85
	Poro	15	0.99	14.85
	Nabo	15	1.07	16.05
	Zapallo	30	1.14	34.2
	Zanahoria	15	1.01	15.15
	Sal	2		2
Pescado a la chorrillana con yuca	Pescado (jurel)	100	1.15	115
	Cebolla	40	1.59	63.6
	Tomate	30	1.59	47.7

	Ají panca	**1**		**1**
	Vinagre	**5**		**5**
	Pimienta	**0.5**		**0.5**
	Comino	**0.5**		**0.5**
	Arroz	**100**	**0.51**	**51**
	Aceite	**15**		**15**
	Sal	**2**		**2**
	Yuca	**100**	**0.98**	**98**
	Ajos	**2**	**1.01**	**2.02**
Mandarina		**150**		**150**
Limonada	**Limón**	**10**		**10**
	Azúcar	**15**		**15**
Cena				
Adobo de cerdo con camote	**Chancho**	**100**	**1.25**	**125**
	Aji panca	**5**		**5**
	Cebolla	**20**	**1.59**	**31.8**
	Pan francés	**10**		**10**
	Camote	**100**	**0.98**	**98**
	Arroz	**100**	**0.51**	**51**
	Sal	**2**		**2**
	Ajos	**2**	**1.01**	**2.02**
	Aceite	**5**		**5**
Gelatina		**30**		**30**
Maracuyá	**Maracuyá**	**30**		**30**
	Azúcar rubia	**20**		**20**

Fuente:

http://www.ins.gob.pe/repositorioaps/0/5/jer/doc_tec_norm/TAFERA_2_compressed.pdf

Los datos de la tabla 5 muestran la lista de precios del mercado mayorista con fecha octubre del 2017.

Tabla 5 Lista de precios del mercado mayorista.

Alimento		Precio por kg, lt, unidad. (según mercado mayorista)[15]
Desayuno		
Leche evap.		2.77/lata (400g)
Quínua con durazno	Quinua	5.75
	Durazno	2.90
	Azúcar rubia	2.63
	Canela	4.7/20g
	Clavo	3.6/10g
Jugo de papaya con plátano	Papaya	1.48
	Plátano de isla	1.88
	Azúcar rubia	2.63
Pan con huevo duro y palta	Pan francés	0.2/30g
	Huevo	4.38
	Palta	3.30
Almuerzo		
Sopa de sémola	Sémola	7.3
	Pollo	5.38
	Apio	1.54
	Poro	1.54
	Nabo	1.52
	Zapallo	1.08
	Zanahoria	0.88
	Sal	0.9
Pescado a la chorrillana con yuca	Pescado (jurel)	6.53
	Cebolla	1.88
	Tomate	1.94
	Ají panca	8

	Vinagre	**2.6/0.5lt**
	Pimienta	**6.4/60g**
	Comino	**3.59/20g**
	Arroz	**2.42**
	Aceite	**6.18/lt**
	Sal	**0.9**
	Yuca	**1.35**
	Ajos	**7.18**
Mandarina		**1.18**
Limonada	**Limón**	**1.01**
	Azúcar	**2.63**
Cena		
Adobo de cerdo con camote	**Chancho**	**13.9**
	Aji panca	**8**
	Cebolla	**1.88**
	Pan francés	**0.2/30g**
	Camote	**0.93**
	Arroz	**2.42**
	Sal	**0.9**
	Ajos	**7.18**
	Aceite	**6.18**
Gelatina		**2.10/250g**
Maracuyá	**Maracuyá**	**1.57**
	Azúcar rubia	**2.63**

Fuente: http://sistemas.minag.gob.pe/sisap/portal/

Los datos de la tabla 6 muestran las porciones de los alimentos al consumir por día.

Tabla 6 Lista de porciones por alimento.

Alimento	Límite (porción/día)[18]
Desayuno	
Leche evap.	4
Quínua con durazno	3
Jugo de papaya con plátano	3
Pan con huevo duro y palta	3
Almuerzo	
Sopa de sémola	2
Pescado a la chorrillana con yuca	2
Mandarina	4
Limonada	4
Cena	
Adobo de cerdo con camote	2
Gelatina	4
Maracuyá	4

Fuente: http://www.fao.org/docrep/014/am401s/am401s02.pdf

V.2.3 Formulación y planteamiento del modelo matemático.

Una vez obtenido los pesos brutos de los alimentos como se observa en la tabla 4, conjuntamente con la tabla 5 de los precios obtenidos por el mercado mayorista, se calcula el precio por porción de cada uno de los alimentos, mediante la regla de tres simple.

Mientras que los productos como vinagre y aceite las cuales sus unidades están en gramos, para obtener sus respectivos precios, se tuvo que aplicar la fórmula $\rho = \frac{m}{V}$ y usar como dato sus respectivas densidades.

Por ejemplo, la densidad del vinagre es $\rho = 1.0056 g / cm^3$, se tiene como dato la masa del vinagre que es m= 5g aplicando $\rho = \frac{m}{V}$ tenemos $V = \frac{5}{1.0056} = 4.97215 cm^3$ ahora convirtiendo cm^3 a litro, se tiene $1\, lt\ es\ 1000 cm^3$ por lo tanto $4.97215 cm^3\ es\ 0.0497215 lt$ como el medio litro de vinagre es 2.6 soles, entonces 0.0497215 *lt* es 0.2585518 soles.

Los precios calculados por porción se encuentran en la tabla 7.

Tabla 7 Lista de precio por porción.

Alimento		Precio (S/. /porción)
Desayuno		
Leche evap.		0.6925
Quínua con durazno	Quinua	0.01983
	Durazno	0.0583
	Azúcar rubia	0.0374
	Canela	0.1175
	Clavo	0.09
		0.32303
Jugo de papaya con plátano	Papaya	0.148
	Plátano de isla	0.038
	Azúcar rubia	0.0675
		0.2535
Pan con huevo duro y palta	Pan francés	0.4
	Huevo	0.23
	Palta	0.132
		0.762
Almuerzo		
Sopa de sémola	Sémola	0.025
	Pollo	0.1592
	Apio	0.462
	Poro	0.462
	Nabo	0.456
	Zapallo	0.03693
	Zanahoria	0.01333
	Sal	0.0018
		1.61626
Pescado a la chorrillana con yuca	Pescado (jurel)	0.75095
	Cebolla	0.11956
	Tomate	0.09254

	Ají panca	0.008
	Vinagre	0.2585518
	Pimienta	0.1175
	Comino	0.09
	Arroz	0.12342
	Aceite	0.100734
	Sal	0.0018
	Yuca	0.1323
	Ajos	0.0145
		1.8098558
Mandarina		0.177
Limonada	Limón	0.0101
	Azúcar	0.03945
		0.0495
Cena		
Adobo de cerdo con camote	Chancho	1.7375
	Aji panca	0.04
	Cebolla	0.0598
	Pan francés	0.067
	Camote	0.0744
	Arroz	0.12342
	Sal	0.0018
	Ajos	0.0145
	Aceite	0.0341
		2.15252
Gelatina		0.252
Maracuyá	Maracuyá	0.0471
	Azúcar rubia	0.0526
		0.0997

Tabla 8 Consolidado de los alimentos con sus requerimientos nutricionales.

Alimento	Peso Neto (g) Tamaño de porción	Energía (kcal)	Proteína (g)	Lípidos (g)	CHO (g)	Grasa Poliins. (g)	Grasa Monoins. (g)	Fibra (g)	Vit A (ug)	Vit C (ug)	Precio (S/. /porción)	Límite (porción/ día)
Desayuno												
Leche evap.	100	133	6.3	7.7	10.9	0.34	2.36	0	65	0	0.6925	4
Quinua con durazno	51	122.26	1.5	0.43	29.22	0	0	0.24	3.2	3.06	0.32303	3
Jugo de papaya con plátano	135	107.2	0.58	0.18	27.5	0.02	0.01	0.60	6.1	48.54	0.2535	3
Pan con huevo duro y palta	150	289.1	12.47	9.32	40.88	1.88	6.25	2.68	2.8	3.32	0.762	3
Almuerzo												
Sopa de sémola	127	99.55	6.35	1.10	17.46	0.12	0.30	1.05	165.3	10.48	1.61626	2
Pescado a la chorrillana con yuca	396	825.60	33.13	20.46	124.78	14.80	1.22	2.35	26.235	58.1755	1.8098558	2
Mandarina	150	52.5	0.9	0.45	12.9	0	0	0.75	51	73.05	0.177	4
Limonada	25	60.6	0.05	0.02	15.85	0	0	0	0.25	11.05	0.0495	4
Cena												
Adobo de cerdo con camote	344	764.08	27.03	21.33	115.82	5.97	7.52	2.5	68.2	17.332	2.15252	2
Gelatina	30	166.32	5.4	0	45.90	0	0	0	0	0	0.252	4
Maracuyá	50	96.10	0.27	0.03	24.27	0	0	0.6	1	0.65	0.0997	4

Formulación y planteamiento del problema de programación lineal caso 2 A

Para conocer el costo mínimo de una dieta saludable de 2000 kcal, es necesario conocer cuál sería la cantidad mínima y máxima que puede ingerir una persona en una comida diaria. Dado lo anterior, para el estudio se identifica cuánto sería la cantidad mínima y la máxima de nutrientes que se deben consumir en el día, para así establecer un intervalo que no sea perjudicial para la salud por consecuencia de excesos o deficiencia de nutrientes. Los intervalos en porcentajes de los requerimientos nutricionales se encuentran en la tabla 1, 2 y 3.

El menú del día consiste en desayuno, almuerzo y cena. Se ha determinado que la comida debe proporcionar como mínimo 2000kcal de energía, 75g de proteínas, 62g de lípidos, 325 g de carbohidratos, 17.8 g de grasa poliinsaturada, 4.4g de grasa monoinsaturada, 25g de fibra, 600 ug de vitamina A y 45 mg de vitamina C. Las cantidades máximas se encuentran en la tabla 1, 2 y 3; los intervalos en porcentajes de los requerimientos nutricionales.

Para evitar la demasiada cantidad de porción de comida, no debe incluirse en ella más de 4 porciones de leche evaporada, 3 porciones de quinua con durazno, 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porciones de pan con huevo y palta, 2 porciones de sopa de sémola, 2 porciones de pescado a la chorrillana, 4 porciones de mandarina, 2 porciones de adobo con cerdo y camote, 4 porciones de gelatina y 4 porciones de maracuyá.

Los precios calculados y los nutrientes para cada tipo de comida se encuentran en la tabla 7.

Además la cantidad de agua presente en los alimentos debe ser como mínimo 1.5 lt de agua totales consumidos por día, y como máximo 2 lt de agua por día.

En la porción de leche 0.2 lt es agua, en la porción de jugo de papaya con plátano 0.2 lt es agua, en la sopa de sémola 0.1 lt es agua, en la porción de limonada 0.25 lt es agua, en la porción de gelatina 0.125 lt es agua, en la porción de maracuyá 0.25 lt es agua.

Se desea determinar qué cantidad de cada tipo de comida se debe incluir en una dieta saludable de 2000kcal para asegurar un mínimo costo.

Primero, se define las variables que intervienen en el problema.

x_j= Número de porción de alimentos a consumir durante el día, donde

x_1 =leche evaporada

x_2 =quinua con durazno

x_3 =jugo de papaya con plátano

x_4 =pan con huevo duro y palta

x_5 =sopa de sémola

x_6 =pescado a la chorrillana

x_7 =mandarina

x_8 =limonada

x_9 =adobo con cerdo y camote

x_{10} =gelatina

x_{11} =maracuyá

Como el objetivo es minimizar el costo, se plantea la función objetivo con los precios obtenidos en la tabla 7.

$$\text{Min } Z= 0.6925\ x_1 + 0.32303\ x_2 + 0.2535\ x_3 + 0.762\ x_4 + 1.61626\ x_5 + 1.8098558\ x_6 + 0.177\ x_7 + 0.0495\ x_8 + 2.15252\ x_9 + 0.252\ x_{10} + 0.0997\ x_{11}$$

En seguida se plantea las restricciones de los nutrientes, obtenidos en la tabla 8.

$$\begin{cases}
133x_1 + 122.26x_2 + 107.2x_3 + 289.1x_4 + 99.55x_5 + 825.6x_6 + 52.5x_7 + 60.6x_8 + 764.08x_9 + 166.32x_{10} + 96.10x_{11} \geq 2000 \\
6.3x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 12.47x_4 + 6.35x_5 + 33.13x_6 + 0.9x_7 + 0.05x_8 + 27.03x_9 + 5.4x_{10} + 0.27x_{11} \geq 75 \\
7.7x_1 + 0.43x_2 + 0.18x_3 + 9.32x_4 + 1.1x_5 + 20.46x_6 + 0.45x_7 + 0.02x_8 + 21.33x_9 + 0.03x_{11} \geq 62 \\
10.9x_1 + 29.22x_2 + 27.5x_3 + 40.88x_4 + 17.46x_5 + 124.78x_6 + 12.9x_7 + 15.85x_8 + 115.82x_9 + 45.9x_{10} + 24.27x_{11} \geq 325 \\
0.34x_1 + 0.02x_3 + 1.88x_4 + 60.12x_5 + 14.80x_6 + 5.97x_9 \geq 17.8 \\
2.36x_1 + 0.01x_3 + 6.25x_4 + 0.3x_5 + 1.22x_6 + 7.52x_9 \geq 4.4 \\
0.24x_1 + 0.6x_2 + 2.68x_3 + 9.32x_4 + 1.05x_5 + 2.35x_6 + 0.75x_7 + 2.5x_9 + 0.6x_{11} \geq 25 \\
65x_1 + 3.2x_2\, 6.1x_3 + 2.8x_4 + 165.3x_5 + 26.235x_6 + 51x_7 + 0.0x5_8 + 68.2x_9 + x_{11} \geq 600 \\
3.06x_2 + 48.54x_3 + 3.32x_4 + 10.48x_5 + 58.1755x_6 + 73.05x_7 + 11.05x_8 + 17.332x_9 + 0.65x_{11} \geq 45 \\
0.2x_1 + 0.2x_3 + 0.1x_5 + 0.25x_8 + 0.125x_{10} + 0.25x_{11} \geq 1.5
\end{cases}$$

Por último se plantea los límites de las porciones:

$$\begin{cases}
0 \leq x_1 \leq 4 \\
0 \leq x_2 \leq 3 \\
0 \leq x_3 \leq 3 \\
0 \leq x_4 \leq 3 \\
0 \leq x_5 \leq 2 \\
0 \leq x_6 \leq 2 \\
0 \leq x_7 \leq 4 \\
0 \leq x_8 \leq 4 \\
0 \leq x_9 \leq 2 \\
0 \leq x_{10} \leq 4 \\
0 \leq x_{11} \leq 4
\end{cases}$$

Formulación y planteamiento del problema de programación lineal caso 2 B

El menú del día consiste en desayuno, almuerzo y cena. Se ha determinado que la comida debe proporcionar como mínimo 2000kcal de energía, 75g de proteínas, 325 g de carbohidratos, 17.8 g de grasa poliinsaturada, 4.4g de grasa monoinsaturada, 25g de fibra, 600 ug de vitamina A y 45 mg de vitamina C. Las cantidades máximas se encuentran en la tabla 1, 2 y 3; los intervalos en porcentajes de los requerimientos nutricionales.

Para evitar la demasiada cantidad de porción de comida, no debe incluirse en ella más de 4 porciones de leche evaporada, 3 porciones de quinua con durazno, 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porciones de pan con huevo y palta, 2 porciones de sopa de sémola, 2 porciones de pescado a la chorrillana, 4 porciones de mandarina, 2 porciones de adobo con cerdo y camote, 4 porciones de gelatina y 4 porciones de maracuyá.

Los contenidos grasos y los nutrientes para cada tipo de comida se encuentran en la tabla 8.

Además la cantidad de agua presente en los alimentos debe ser como mínimo 1.5 lt de agua totales consumidos por día, y como máximo 2 lt de agua por día.

En la porción de leche 0.2 lt es agua, en la porción de jugo de papaya con plátano 0.2 lt es agua, en la sopa de sémola 0.1 lt es agua, en la porción de limonada 0.25 lt es agua, en la porción de gelatina 0.125 lt es agua, en la porción de maracuyá 0.25 lt es agua.

Se desea determinar qué cantidad de cada tipo de comida se debe incluir en una dieta saludable de 2000kcal para asegurar una mínima cantidad de grasa.

Primero, se define las variables que intervienen en el problema.

x_j= Número de porción de alimentos a consumir durante el día, donde

x_1 =leche evaporada

x_2 =quinua con durazno

x_3 =jugo de papaya con plátano

x_4 =pan con huevo duro y palta

x_5 =sopa de sémola

x_6 =pescado a la chorrillana

x_7 =mandarina

x_8 =limonada

x_9 =adobo con cerdo y camote

x_{10} =gelatina

x_{11} =maracuyá

Como el objetivo es minimizar el contenido de grasas de la dieta, se plantea la función objetivo con la cantidad de grasa presentes en la tabla 8.

Min $Z= 7.7\ x_1 + 0.42\ x_2 + 0.18\ x_3 + 9.32\ x_4 + 1.1\ x_5 + 20.46\ x_6 + 0.45\ x_7 + 0.02\ x_8 + 21.33\ x_9 + 0.03\ x_{11}$

En seguida se plantea las restricciones de los nutrientes, presentes en la tabla 8.

$$\begin{cases} 133x_1 + 122.26x_2 + 107.2x_3 + 289.1x_4 + 99.55x_5 + 825.6x_6 + 52.5x_7 + 60.6x_8 + 764.08x_9 + 166.32x_{10} + 96.10x_{11} \geq 2000 \\ 6.3x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 12.47x_4 + 6.35x_5 + 33.13x_6 + 0.9x_7 + 0.05x_8 + 27.03x_9 + 5.4x_{10} + 0.27x_{11} \geq 75 \\ 10.9x_1 + 29.22x_2 + 27.5x_3 + 40.88x_4 + 17.46x_5 + 124.78x_6 + 12.9x_7 + 15.85x_8 + 115.82x_9 + 45.9x_{10} + 24.27x_{11} \geq 325 \\ 0.34x_1 + 0.02x_3 + 1.88x_4 + 60.12x_5 + 14.80x_6 + 5.97x_9 \geq 17.8 \\ 2.36x_1 + 0.01x_3 + 6.25x_4 + 0.3x_5 + 1.22x_6 + 7.52x_9 \geq 4.4 \\ 0.24x_1 + 0.6x_2 + 2.68x_3 + 9.32x_4 + 1.05x_5 + 2.35x_6 + 0.75x_7 + 2.5x_9 + 0.6x_{11} \geq 25 \\ 65x_1 + 3.2x_2 6.1x_3 + 2.8x_4 + 165.3x_5 + 26.235x_6 + 51x_7 + 0.0x5_8 + 68.2x_9 + x_{11} \geq 600 \\ 3.06x_2 + 48.54x_3 + 3.32x_4 + 10.48x_5 + 58.1755x_6 + 73.05x_7 + 11.05x_8 + 17.332x_9 + 0.65x_{11} \geq 45 \\ 0.2x_1 + 0.2x_3 + 0.1x_5 + 0.25x_8 + 0.125x_{10} + 0.25x_{11} \geq 1.5 \end{cases}$$

Por último se plantea los límites de las porciones:

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_3 \leq 3 \\ 0 \leq x_4 \leq 3 \\ 0 \leq x_5 \leq 2 \\ 0 \leq x_6 \leq 2 \\ 0 \leq x_7 \leq 4 \\ 0 \leq x_8 \leq 4 \\ 0 \leq x_9 \leq 2 \\ 0 \leq x_{10} \leq 4 \\ 0 \leq x_{11} \leq 4 \end{cases}$$

VI. Resultados

Caso 1 USANDO EL PROGRAMA LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              33.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2
Elapsed runtime seconds:                          0.04

Model Class:                                        LP

Total variables:                      2
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                    4
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                       8
Nonlinear nonzeros:                   0


                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        3.000000            0.000000
                             X2        12.00000            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        33.00000            1.000000
                              2        0.000000            1.250000
                              3        0.000000           0.2500000
                              4        3.000000            0.000000
```

Caso 1 USANDO EL PROGRAMA EXCEL

	x1	x2			limites	holgura
valor final	3	12				
max	3	2	33			
restricciones						
r1	2	1	18	<	18	0
r2	2	3	42	<	42	0
r3	3	1	21	<	24	3

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
B4	valor final x1	3	0	3	1	1.666666667
C4	valor final x2	12	0	2	2.5	0.5

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
D10	r1	18	1.25	18	1.714285714	4
D11	r2	42	0.25	42	12	12
D12	r3	21	0	24	1E+30	3

Aquí observamos que el valor óptimo se alcanza cuando las variables $x_1 = 3$ y $x_2 = 12$. Si reemplazo esta solución a la restricción 1, da 18; a la restricción 2, da 42 y a la restricción 3, da 21. Esto hace que la variable de holgura de las dos primeras restricciones sean cero, mientras que la restricción 3 su variable de holgura es 3, es decir que hay un recurso en carencia de 3 unidades que no se está usando.

En el costo reducido o costo de oportunidad de una variable x que toma el valor 0 es lo que debe mejorar el coeficiente x en la función objetivo para que el valor de x pase a ser no nulo. Si el problema es de minimización la variable debería disminuir. Las variables que son no nulas tienen un costo reducido nulo, ya que es el óptimo.

En el problema observamos que, si aumentamos en una unidad al término independiente de la restricción 1, su precio sombra es de 1.25, esto quiere decir que el valor de la función objetivo aumentaría de 33 a 34.5 y sus respectivos $x_1 = 3.75$ y $x_2 = 11.5$. De igual forma, si aumentamos en una unidad al término independiente de la restricción 2, su precio sombra es de 0.25, esto quiere decir que el valor de la función objetivo aumentaría de 33 a 33.25 y sus respectivos $x_1 = 2.75$ y $x_2 = 12.5$. Finalmente si aumentamos en una unidad al término independiente de la restricción 3, su precio sombra es de 0, lo que significa que el resultado de la función objetivo no varía.

Para que los precios sombra sean válidas, los intervalos permitidos de los términos independientes son:

$b_1 \in [14;19.71], \quad b_2 \in [30;54], \quad b_3 \in [21;\infty[$

Para que no cambie la solución óptima de las variables, pero si la función objetivo, los intervalos permitidos para los coeficientes de la función objetivo son: $c_1 \in [1.33;4], \quad c_2 \in [1.5;4.5]$

Caso 2 A USANDO EL PROGRAMA LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              13.04067
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             4
Elapsed runtime seconds:                          0.14

Model Class:                                        LP

Total variables:                     11
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                   22
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                     110
Nonlinear nonzeros:                   0


                Variable           Value        Reduced Cost
                      X1        0.000000           0.3537435
                      X2        0.000000           0.1338325
                      X3        3.000000            0.000000
                      X4        3.000000            0.000000
                      X5        1.279074            0.000000
                      X6        2.000000            0.000000
                      X7        4.000000            0.000000
                      X8        0.000000       0.4819709E-01
                      X9        1.486789            0.000000
                     X10        0.000000           0.2520000
                     X11        4.000000            0.000000

                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                   COSTO        13.04067           -1.000000
                 ENERGIA        2697.857            0.000000
                PROTEINA        83.16002            0.000000
                 LIPIDOS        42.46019            0.000000
           CARBOHIDRATOS        472.9125            0.000000
            GRASAPOLIINS        26.52962            0.000000
          GRASAMOMOINSAT        28.38437            0.000000
                   FIBRA        0.000000          -0.7188345
                VITAMIAA        0.000000      -0.5211638E-02
               VITAMINAC        560.9047            0.000000
                    AGUA       0.2279074            0.000000
          LECHEEVAPORADA        4.000000            0.000000
       QUINUACONDURAZNO         3.000000            0.000000
  JUGODEPAPAYACONPLATANO        0.000000           0.2095917
   PANCONHUEVODUROYPALTA        0.000000            1.179069
            SOPADESEMOLA       0.7209255            0.000000
   PESCADOALACHORRILLANA        0.000000       0.1613263E-01
               MANDARINA        0.000000           0.6279194
                LIMONADA        4.000000            0.000000
    ADOBOCONCERDOYCAMOTE       0.5132113            0.000000
                GELATINA        4.000000            0.000000
                MARACUYA        0.000000           0.3368123
```

Caso 2 A USANDO EL PROGRAMA EXCEL

	x1 (leche e\	x2 (quinu	x3 (jugo	x4 (pa	x5 (sopa	x6 (pescado	x7 (ma	x8 (limo	x9 (adob	x10 (gel	x11 (maracuyá)			Límites	Holgura
valor final	0	0	3	3	1.27907	2	4	0	1.48679	0	4				
mín Costo	0.6925	0.32303	0.2535	0.762	1.61626	1.8098558	0.177	0.0495	2.15252	0.252	0.0997	13.04067096			
restricciones															
R1 (energía kcal)	133	122.26	107.2	289.1	99.55	825.6	52.5	60.6	764.08	166.32	96.1	4697.857392	>	2000	-2697.85739
R2 (proteína g)	6.3	1.5	0.5	12.47	6.35	33.13	0.9	0.05	27.03	5.4	0.27	158.1600221	>	75	-83.1600221
R3 (lípidos g)	7.7	0.43	0.18	9.32	1.1	20.46	0.45	0.02	21.33	0	0.03	104.4601854	>	62	-42.4601854
R4 (carbohidratos g)	10.9	29.22	27.5	40.88	17.46	124.78	12.9	15.85	115.82	45.9	24.27	797.9125103	>	325	-472.91251
R5 (grasa poliins. g)	0.34	0	0.02	1.88	0.12	14.8	0	0	5.97	0	0	44.32961762	>	17.8	-26.5296176
R6 (grasa monoins. g)	2.36	0	0.01	6.25	0.3	1.22	0	0	7.52	0	0	32.78437355	>	4.4	-28.3843736
R7 (fibra g)	0	0.24	0.6	2.68	1.05	2.35	0.75	0	2.5	0	0.6	25	>	25	0
R8 (vit A ug)	65	3.2	6.1	2.8	165.3	26.235	51	0.25	68.2	0	1	600	>	600	0
R9 (vit C mg)	0	3.06	48.54	3.32	10.48	58.1755	73.05	11.05	17.332	0	0.65	605.9047226	>	45	-560.904723
R10(agua lt)	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0.25	0	0.125	0.25	1.727907446	>	1.5	0
x1 (leche evaporada)	1											0	<	4	4
x2 (quinua con durazno)		1										0	<	3	3
x3 (jugo de papaya con plátano)			1									3	<	3	0
x4 (pan con huevo y palta)				1								3	<	3	0
x5(sopa de sémola)					1							1.279074464	<	2	0.72092554
x6 (pescado a la chorrillana)						1						2	<	2	0
x7 (mandarina)							1					4	<	4	0
x8 (limonada)								1				0	<	4	4
x9 (adobo de cerdo con camote)									1			1.486788725	<	2	0.51321128
x10 (gelatina)										1		0	<	4	4
x11 (maracuyá)											1	4	<	4	0

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C3	valor final x1 (leche evaporada)	0	0.353743531	0.6925	1E+30	0.353743531
D3	valor final x2 (quinua con durazno)	0	0.133832475	0.32303	1E+30	0.133832475
E3	valor final x3 (jugo de papaya con plátano	3	0	0.2535	0.209591701	1E+30
F3	valor final x4 (pan con huevo y palta)	3	0	0.762	1.179069089	1E+30
G3	valor final x5 (sopa de sémola)	1.279074464	0	1.61626	0.058210898	0.7122016
H3	valor final x6 (pescado a la chorrillana)	2	0	1.8098558	0.016132635	1E+30
I3	valor final x7 (mandarina)	4	0	0.177	0.627919424	1E+30
J3	valor final x8 (limonada)	0	0.048197091	0.0495	1E+30	0.048197091
K3	valor final x9 (adobo de cerdo y camote)	1.486788725	0	2.15252	1.259157486	0.015271342
L3	valor final x10 (gelatina)	0	0.252	0.252	1E+30	0.252
M3	valor final x11 (maracuyá)	4	0	0.0997	0.336812348	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
N10	R2 (proteína g)	158.1600221	0	75	83.16002208	1E+30
N11	R3 (lípidos g)	104.4601854	0	62	42.46018541	1E+30
N12	R4 (carbohidratos g)	797.9125103	0	325	472.9125103	1E+30
N13	R5 (grasa poliins. g)	44.32961762	0	17.8	26.52961762	1E+30
N14	R6 (grasa monoins. g)	32.78437355	0	4.4	28.38437355	1E+30
N15	R7 (fibra g)	25	0.718834516	25	1.06069873	3.072876588
N16	R8 (vit A ug)	600	0.005211638	600	98.5188	166.9842857
N17	R9 (vit C mg)	605.9047226	0	45	560.9047226	1E+30
N18	R10(agua lt)	1.727907446	0	1.5	0.227907446	1E+30
N19	x1 (leche evaporada)	0	0	4	1E+30	4
N20	x2 (quinua con durazno)	0	0	3	1E+30	3
N21	x3 (jugo de papaya con plátano)	3	-0.209591701	3	5.475036378	1.098276324
N22	x4 (pan con huevo y palta)	3	-1.179069089	3	1.154255972	0.398427274
N23	x5(sopa de sémola)	1.279074464	0	2	1E+30	0.720925536
N24	x6 (pescado a la chorrillana)	2	-0.016132635	2	1.407411718	0.485811837
N25	x7 (mandarina)	4	-0.627919424	4	5.723418468	2.489648562
N26	x8 (limonada)	0	0	4	1E+30	4
N27	x9 (adobo de cerdo con camote)	1.486788725	0	2	1E+30	0.513211275
N28	x10 (gelatina)	0	0	4	1E+30	4
N29	x11 (maracuyá)	4	-0.336812348	4	5.176261082	0.872387173
N9	R1 (energía kcal)	4697.857392	0	2000	2697.857392	1E+30

Según los resultados, observamos que la columna value (LINGO) o Final valor (Excel), contiene el valor óptimo de cada variable, está tomando en cuenta 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porciones de pan con huevo y palta, 1 porción de sopa de sémola, 2 porciones de pescado a la chorrillana, 4 mandarina, 1 porción de adobo con camote y 4 porción de maracuyá. La cual nos da un costo mínimo de 13.041 soles.

En la columna del costo reducido, vemos que la leche disminuirá en 0.353743531 soles, en la función objetivo para que el costo reducido sea nulo, lo que equivale a un valor óptimo. De la misma forma la quinua con durazno disminuirá en 0.1338325 soles, la limonada disminuirá en 0.04819 soles, y la gelatina disminuirá en 0.252 soles.

En la columna de slack or surplus, se observa que hay un excedente o sobrante de 2697.8 g de energía, 83.16g de proteína, 42.46 g de lípidos, 472.91 g de carbohidratos, 26.53g de grasa poliinsaturadas, 28.38 g de grasa monoinsaturadas, 560mg de vitamina C, 4porciones de leche evaporada, 3 porciones de quinua con durazno, 0.72 porción de sopa de sémola, 4 porciones de limonada, 0.513 porción de adobo de cerdo con camote y 4 porciones de gelatina.

Si disminuimos en 1 g al término independiente a la fibra, su precio sombra es de 0.71883 soles, esto quiere decir que la función objetivo disminuye de 13.04067 soles a 12.3218 soles. De igual forma para la vitamina A, si se disminuye 1 ug de vitamina A, su precio sombra es de

0.0052116 lo que implica una disminución de precio en la función objetivo de 13.04067 soles a 13.0354 soles.

Nos conviene aumentar una porción de pan con huevo y palta, cuyo precio sombra es de 1.179069, eso hace que el precio de la función objetivo disminuya de 13.04067 soles a 11.861601 soles.

Ahora, si aumentamos una porción de leche evaporada, una porción de quinua con durazno, una porción de sopa de sémola, una porción de limonada y una porción de gelatina; el precio de la función objetivo no varía, ya que su precio sombra es cero. Esto es debido a que tiene un excedente o sobrante de 4, 3, 1, 4 y 4 porciones respectivamente.

Por lo que nos conviene aumentar simultáneamente una porción de jugo de papaya con plátano, una porción de pan con huevo y palta, una porción de pescado a la chorrillana, una porción de mandarina y una porción de maracuyá, lo que nos da un precio de la función objetivo disminuido de 13.04067 soles a 10.671145 soles.

Finalmente, los intervalos permitidos de los términos independientes o las restricciones son:

$$b_1 \in [0;4697.86], \quad b_2 \in [0;158.16], \quad b_3 \in [0;104.46], \quad b_4 \in [0;797.913],$$
$$b_5 \in [0;44.33], \quad b_6 \in [0;32.78], \quad b_7 \in [21.927;26.06], \quad b_8 \in [433.02;698.52],$$
$$b_9 \in [0;605.9]$$

para que no cambie la solución óptima de las variables, pero si la función objetivo, los intervalos permitidos para los coeficientes de la función objetivo son:

$$c_1 \in [0.338;\infty[,\quad c_2 \in [0.189;\infty[,\quad c_3 \in [0;0.463],\quad c_4 \in [0;1.941],$$
$$c_5 \in [0.904;1.674],\quad c_6 \in [0;1.826],\quad c_7 \in [0;0.805],\quad c_8 \in [3.412;\infty[,$$
$$c_9 \in [2.137;3.412],\quad c_{10} \in [0;\infty[,\quad c_{11} \in [0;0.437]$$

Y para las porciones serían:

$$x_1 \in [0;\infty[,\quad x_2 \in [0;\infty[,\quad x_3 \in [1;8],\quad x_4 \in [2;4],\quad x_5 \in [1;\infty[,\quad x_6 \in [1;3],$$
$$x_7 \in [2;9],\quad x_8 \in [0;\infty[,\quad x_9 \in [1;\infty[,\quad x_{10} \in [0;\infty[,\quad x_{11} \in [2;9]$$

Caso 2 B USANDO EL PROGRAMA LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              93.46038
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             8
Elapsed runtime seconds:                          0.06

Model Class:                                        LP

Total variables:                     11
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                    0

Total constraints:                   21
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                      99
Nonlinear nonzeros:                   0


                      Variable           Value        Reduced Cost
                            X1        0.000000            7.700000
                            X2        3.000000            0.000000
                            X3        3.000000            0.000000
                            X4        3.000000            0.000000
                            X5        2.000000            0.000000
                            X6       0.8255319            0.000000
                            X7        4.000000            0.000000
                            X8        0.000000           0.2000000E-01
                            X9        2.000000            0.000000
                           X11        4.000000            0.000000
                           X10        4.000000            0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         GRASA        93.46038           -1.000000
                       ENERGIA        3224.179            0.000000
                      PROTEINA        88.79987            0.000000
                 CARBOHIDRATOS        669.6499            0.000000
                  GRASAPOLIINS        12.29787            0.000000
                GRASAMOMOINSAT        31.02715            0.000000
                         FIBRA        0.000000           -8.706383
                      VITAMIAA        132.9578            0.000000
                     VITAMINAC        518.2097            0.000000
                          AGUA       0.7800000            0.000000
               LECHEEVAPORADA         4.000000            0.000000
             QUINUACONDURAZNO         0.000000            1.659532
     JUGODEPAPAYACONPLATANO           0.000000            5.043830
       PANCONHUEVODUROYPALTA          0.000000            14.01311
                 SOPADESEMOLA         0.000000            8.041702
       PESCADOALACHORRILLANA          1.174468            0.000000
                    MANDARINA         0.000000            6.079787
                     LIMONADA         4.000000            0.000000
         ADOBOCONCERDOYCAMOTE         0.000000           0.4359574
                     GELATINA         0.000000            0.000000
                     MARACUYA         0.000000            5.193830
```

Caso 2 B USANDO EL PROGRAMA EXCEL

	x1 (lech	x2 (quin	x3 (jugo	x4 (pa	x5 (sopa	x6 (pescac	x7 (ma	x8 (limo	x9 (adob	x10 (gel	x11 (maracuyá)			Límites	Holgura
valor final	0	3	3	3	2	0.825532	4	0	2	0	4				
mín Grasa	7.7	0.43	0.18	9.32	1.1	20.46	0.45	0.02	21.33	0	0.03	93.46038298			
restricciones															
R1 (energía g)	133	122.26	107.2	289.1	99.55	825.6	52.5	60.6	764.08	166.32	96.1	4558.899149	>	2000	-2558.89915
R2 (proteína g)	6.3	1.5	0.5	12.47	6.35	33.13	0.9	0.05	27.03	5.4	0.27	142.1998723	>	75	-67.1998723
R4 (carbohidratos g)	10.9	29.22	27.5	40.88	17.46	124.78	12.9	15.85	115.82	45.9	24.27	811.0498723	>	325	-486.049872
R5 (grasa poliins. g)	0.34	0	0.02	1.88	0.12	14.8	0	0	5.97	0	0	30.09787234	>	17.8	-12.2978723
R6 (grasa monoins. g)	2.36	0	0.01	6.25	0.3	1.22	0	0	7.52	0	0	35.42714894	>	4.4	-31.0271489
R7 (fibra g)	0	0.24	0.6	2.68	1.05	2.35	0.75	0	2.5	0	0.6	25	>	25	0
R8 (vit A ug)	65	3.2	6.1	2.8	165.3	26.235	51	0.25	68.2	0	1	732.9578298	>	600	-132.95783
R9 (vit C mg)	0	3.06	48.54	3.32	10.48	58.1755	73.05	11.05	17.332	0	0.65	563.2097319	>	45	-518.209732
R10(agua lt)	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0.25	0	0.125	0.25	1.8	>	1.5	0
x1 (leche evaporada)	1											0	<	4	4
x2 (quinua con durazno)		1										3	<	3	0
x3 (jugo de papaya con plátano)			1									3	<	3	0
x4 (pan con huevo y palta)				1								3	<	3	0
x5 (sopa de sémola)					1							2	<	2	0
x6 (pescado a la chorrillana)						1						0.825531915	<	2	1.17446809
x7 (mandarina)							1					4	<	4	0
x8 (limonada)								1				0	<	4	4
x9 (adobo de cerdo con camote)									1			2	<	2	0
x10 (gelatina)										1		0	<	4	4
x11 (maracuyá)											1	4	<	4	0

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C3	valor final x1 (leche evaporada)	0	7.7	7.7	1E+30	7.7
D3	valor final x2 (quinua con durazno)	3	0	0.43	1.659531915	1E+30
E3	valor final x3 (jugo de papaya con plátano)	3	0	0.18	5.043829787	1E+30
F3	valor final x4 (pan con huevo y palta)	3	0	9.32	14.01310638	1E+30
G3	valor final x5 (sopa de sémola)	2	0	1.1	8.041702128	1E+30
H3	valor final x6 (pescado a la chorrillana)	0.825531915	0	20.46	1E+30	0.4098
I3	valor final x7 (mandarina)	4	0	0.45	6.079787234	7.00864E+13
J3	valor final x8 (limonada)	0	0.02	0.02	1E+30	0.02
K3	valor final x9 (adobo con cerdo y camote)	2	0	21.33	0.435957447	1E+30
L3	valor final x10 (gelatina)	0	0	0	1E+30	0
M3	valor final x11 (maracuyá)	4	0	0.03	5.193829787	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
N10	R2 (proteína g)	142.1998723	0	75	67.19987234	1E+30
N12	R4 (carbohidratos g)	811.0498723	0	325	486.0498723	1E+30
N13	R5 (grasa poliins. g)	30.09787234	0	17.8	12.29787234	1E+30
N14	R6 (grasa monoins. g)	35.42714894	0	4.4	31.02714894	1E+30
N15	R7 (fibra g)	25	8.706382979	25	2.76	1.94
N16	R8 (vit A ug)	732.9578298	0	600	132.9578298	1E+30
N17	R9 (vit C mg)	563.2097319	0	45	518.2097319	1E+30
N18	R10(agua lt)	1.8	0	1.5	0.3	1E+30
N19	x1 (leche evaporada)	0	0	4	1E+30	4
N20	x2 (quinua con durazno)	3	-1.659531915	3	8.083333333	3
N21	x3 (jugo de papaya con plátano)	3	-5.043829787	3	3.233333333	1.5
N22	x4 (pan con huevo y palta)	3	-14.01310638	3	0.723880597	1.029850746
N23	x5 (sopa de sémola)	2	-8.041702128	2	1.847619048	0.865734989
N24	x6 (pescado a la chorrillana)	0.825531915	0	2	1E+30	1.174468085
N25	x7 (mandarina)	4	-6.079787234	4	2.586666667	3.119089582
N26	x8 (limonada)	0	0	4	1E+30	4
N27	x9 (adobo de cerdo con camote)	2	-0.435957447	2	0.776	1.104
N28	x10 (gelatina)	0	0	4	1E+30	4
N29	x11 (maracuyá)	4	-5.193829787	4	3.233333333	1.2
N9	R1 (energía g)	4558.899149	0	2000	2558.899149	1E+30

Según los resultados, observamos que la columna value (LINGO) o Final valor (Excel), contiene el valor óptimo de cada variable, está tomando en cuenta 3 porciones de quinua con durazno, 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porción de pan con huevo y palta, 2 porciones de sopa de sémola, 0.825 porción de pescado a la chorrillana, 4 porción de mandarina, 2 porción de adobo de cerdo con camote, 4 porción de gelatina y 4 porción de maracuyá. La cual nos da una mínima cantidad de grasa de 93.46038g.

En la columna del costo reducido, vemos que la leche disminuirá en 7.7 g de grasa, en la función objetivo para que el costo reducido sea nulo, lo que equivale a un óptimo valor.

En la columna de slack or surplus, se observa que hay un excedente o sobrante de 3224.179 g de energía, 88.79987g de proteína, 669.64991 g de carbohidratos, 12.29787g de grasa poliinsaturadas, 31.02715 g de grasa monoinsaturadas, 132.9578ug de vitamina A, 518.2097mg de vitamina C, 4 porciones de leche evaporada, 1.174468 porción de pescado a la chorrillana y 4 porciones de limonada.

Si disminuimos en 1 g al término independiente de la fibra, su precio sombra es de 8.706383g, esto quiere decir que la función objetivo disminuye de 93.46038 g a 84.753997g.

Si aumentamos una porción de quinua con durazno, su precio sombra es de 1.659532g, eso hace que la cantidad de grasa de la función objetivo disminuya de 93.46038 g a 91.800848g.

Finalmente, los intervalos permitidos de los términos independientes o restricciones son:

$$b_1 \in [0;4558.89], \quad b_2 \in [0;142.2], \quad b_4 \in [0;811.05], \quad b_5 \in [0;30.1],$$
$$b_6 \in [0;35.43], \quad b_7 \in [23.06;27.76], \quad b_8 \in [0;732.95], \quad b_9 \in [0;563.21]$$

para que no cambie la solución óptima de las variables, pero si la función objetivo, los intervalos permitidos para los coeficientes de la función objetivo son:

$$c_1 \in [0;\infty[, \quad c_2 \in [0;2.089], \quad c_3 \in [0;5.224], \quad c_4 \in [0;23.33],$$
$$c_5 \in [0;9.142], \quad c_6 \in [20.05;\infty[, \quad c_7 \in [0;6.53], \quad c_8 \in [0;\infty[,$$
$$c_9 \in [0;21.77], \quad c_{10} \in [0;\infty[, \quad c_{11} \in [0;5.224]$$

Y para las porciones serían:

$$x_1 \in [0;\infty[, \quad x_2 \in [0;11], \quad x_3 \in [0;6], \quad x_4 \in [2;3], \quad x_5 \in [1;3], \quad x_6 \in [1;\infty[,$$
$$x_7 \in [1;6], \quad x_8 \in [0;\infty[, \quad x_9 \in [1;2], \quad x_{10} \in [0;\infty[, \quad x_{11} \in [0;7]$$

VII. Discusión

1. Al plantear un problema de programación lineal, damos por aceptado que los valores de los parámetros se conocen con certidumbre; pero en la realidad no siempre se cumple que los valores sean los mismos durante un largo periodo de tiempo, debido a las variaciones en los precios de los productos que ocasionan cambios en los coeficientes de la función objetivo.
2. Para la minimización de costo, si realizamos los siguientes ajustes como:

   Disminuir el precio de la porción leche a 0.3387 soles, disminuir el precio de la porción de quinua con durazno a 0.1895 soles y disminuir el precio de la porción de limonada a 0.0013 soles; disminuir 1g en fibra y vitamina A; aumentar una porción de jugo de papaya con plátano, una porción de pan con huevo y palta, una porción de pescado a la chorrillana, una porción de mandarina y una porción de maracuyá entonces el precio mínimo de la función objetivo reducirá a 9.967145 soles. Esto quiere decir, una persona puede desayunar, almorzar y cenar con 9.98 soles por día; con un costo promedio mensual de 299.4 soles, inferior al precio de la canasta básica de alimentos.
3. Para la minimización de la cantidad de grasa, si realizamos los siguientes ajustes como:

   Eliminar la porción de leche y limonada; disminuir 1 g en fibra; aumentar una porción de quinua con durazno, una porción de jugo de papaya con plátano, una porción de pan con huevo y palta, una porción de sopa de sémola, una porción de mandarina, una porción de adobo de cerdo con camote y una porción de maracuyá entonces la cantidad mínima de grasa de la función objetivo reducirá a 53.39942g.

VIII. Conclusiones

1. La solución óptima de minimización de costo es de 13.04067 soles, tomando como menú completo del día; 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porciones de pan con huevo y palta, 1 porción de sopa de sémola, 2 porciones de pescado a la chorrillana, 4 mandarina, 1 porción de adobo con camote y 4 porción de maracuyá.

2. La solución óptima de minimizar la cantidad de grasa es de 93.46038 g, tomando como menú completo del día; 3 porciones de quinua con durazno, 3 porciones de jugo de papaya con plátano, 3 porción de pan con huevo y palta, 2 porciones de sopa de sémola, 1 porción de pescado a la chorrillana, 4 porción de mandarina, 2 porción de adobo de cerdo con camote, 4 porción de gelatina y 4 porción de maracuyá.

3. Para el problema de dieta al minimizar los costos, los valores factible y óptimo fueron

$$b_1 \in [2000;2500], \quad b_2 \in [50;75], \quad b_3 \in [33.3;62.2], \quad b_4 \in [275;325],$$
$$b_5 \in [13.3;17.8], \quad b_6 \in [4.4;8.9], \quad b_7 \in [21.927;26.06],$$
$$b_8 \in [433.02;698.52], \quad b_9 \in [90;2000], \quad b_{10} \in [1.5;1.78]$$

donde b_i son los requerimientos nutricionales o lo que se conoce como restricciones.

$$x_1 \in [0;4], \quad x_2 \in [0;3], \quad x_3 \in [1;3], \quad x_4 \in [2;3], \quad x_5 \in [0;2], \quad x_6 \in [1;3],$$
$$x_7 \in [2;4], \quad x_8 \in [0;4], \quad x_9 \in [1;2], \quad x_{10} \in [0;4], \quad x_{11} \in [2;5]$$

y x_i son las porciones de los alimentos.

4. El Hospital Nacional Cayetano Heredia tiene una capacidad para 550 pacientes hospitalizados, de los cuales 150 a 200 pacientes consume una dieta normal diaria. Con un análisis pos óptimo, el hospital ahorraría aproximadamente de 219 000 soles anual.

IX. Recomendaciones

En mi opinión éste modelo puede ser implementado en la unidad de nutrición para mejorar la calidad de atención al paciente, coadyuvar al médico en el tratamiento y permitir la mejor distribución de recursos al bajar los costos y minimizar las grasas lo que permitirá una redistribución de los recursos.

Partiendo de una buena alimentación a un costo mínimo, se pueden realizar menús completos para niños de escasos recursos, el gobierno y diferentes tipos de organizaciones pueden utilizar el modelo para establecer una dieta sana y económica para los colegios de zonas rurales.

X. Referencias bibliográficas

[1] Albers, D. J. y J. K. Reid, (1986). «An interview with George B. Dantzig: the father of linear programming», *The College Mathematics Journal*, **17**(4), pp. 292-314.

[2] Bazarra M., Jarvis J., Sherali H. (1999). Programación lineal y flujo de redes. Ed. Limusa. 2da Edición.

[3] Bazaraa M. S., Sherali, H. D., and Shetty C. M. (1993). Nonlinear Programming, Theory and Algorithms. 2da Edición. Wiley, New York.

[4] Castillo E., Cornejo A., Pedregal P., García R., y Alguacil N. (2002). Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia.
Recuperado de http://ingenieria-industrial.net/downloads/LibroCompleto.pdf

[5] Chávez A., Rojas M., y Cumsille P. Resolución de problemas de Programación Lineal, mediante el método simplex. Recuperado de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/282/3/Chavez_Abello_Rodrigo.pdf

[6] Haeussler, Paul. (2017). Cálculo Básico con Aplicación a la Ciencia de la Vida. Ed. Pearson. 1ra Edición.

[7] Hillier Frederick S., Lieberman Gerard J., (2010) Introducción a la Investigación de Operaciones. Ed. Mc. Graw Hill. 9na Edición.

[8] Luenberger D., Ye Y. (2016). Linear and Nonlinear Programming. Ed. Springer. 4ta Edición.

[9] Martin, Q. (2011). Investigación de operaciones. Recuperado de http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/investigacion-operativa-i/contenidos/TemasIO-I_PDF/Cap02%28PL%29_IO-I.pdf

[10] Mathur, K.,Solow, D. (1996). Investigación de Operaciones. Ed. Prentice Hall.

[11] Soo Tan. (2010). Matemáticas Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la vida. Ed. Cengage. 5ta edición.

[12] Taha, Hamdy A. (2012). Investigación de Operaciones. Ed. Pearson. 9na Edición.

[13] http://www.ins.gob.pe/repositorioaps/0/5/jer/tab_cien_cenan/Tabla%20de%20Alimentos.pdf

[14] http://www.bvs.ins.gob.pe/insprint/cenan/tabla_dosificacion_alimentos_servicios_alimentacion_col.pdf

[15] http://sistemas.minag.gob.pe/sisap/portal/

[16] http://www.ins.gob.pe/repositorioaps/0/5/jer/doc_tec_norm/TAFERA_2_compressed.pdf

[17] http://www.ins.gob.pe/repositorioaps/0/5/jer/doc_tec_norm/Factores%20de%20conversi%C3%B3n%20de%20cocido%20-%20crudo.pdf

[18] http://www.fao.org/docrep/014/am401s/am401s02.pdf

XI. Anexos

Teorema 1

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar, donde *A* es una matriz m x n, y el rango de A es m, se tiene:

(a) Si existe una solución posible, también existe una solución posible básica.

(b) Si el problema tiene una solución posible óptima, entonces también tiene una solución posible básica óptima.

Demostración

(a) Sean $A_1,...A_n$ las columnas de *A* y $x^T = (x_1,...,x_n)$ una solución posible, o sea $x_1A_1 + ... + x_nA_n = b$

Supongamos que *p* de estos x_i son positivos y asumamos que son los *p* primeros, para mayor simplicidad. Luego obtendremos que

$$x_1A_1 + ... + x_pA_p = b \qquad (1.1)$$

Separamos dos casos:

Caso 1: $A_1,...A_p$ son linealmente independiente, esto implica que $p \leq m$. Ya que el rango de *A* es *m*, en el caso de que *p* = *m*, la afirmación (a) es cierta, puesto que *p* = *m* nos asegura siempre encontrar una solución para $x_1,...x_p$, además única. Ahora bien, si *p* < *m*, como el rango de *A* es *m*, es posible encontrar (*m* – *p*) vectores columnas de *A*, entre las (*n* – *p*) columnas restantes, de modo que junto a las *p* que se tienen, formen un conjunto de *m* vectores linealmente independientes. Si asignamos el valor cero a las (*m* –

p) componentes de x asociadas con estas columnas, obtendremos una solución básica.

Caso 2: $A_1,...A_p$ son linealmente dependientes. En este caso tendremos que

$$y_1A_1+...+y_pA_p=0 \qquad (1.2)$$

en donde no todos los y_i (i=1, …,p) son nulos, no es difícil ver que al menos un y_i es mayor que cero. Luego multiplicando (1.2) por $\in$ y sustituyendo esta nueva expresión a (1.1) obtenemos que $(x_1-\in y_1)A_1+...+(x_p-\in y_p)A_p=b$.

Este sistema de ecuación es válido para cualquier valor de $\in$. Sin embargo, si queremos obtener soluciones posibles, o sea, que sean no negativas, debemos tener precaución para escoger los valores de $\in$. Ahora bien, si $\in=0$, obtendríamos la solución inicial de (1.1).

Si $\in>0$ y aumenta, la componente $(x_i-\in y_i)$ aumentará, disminuirá o se mantendrá igual según y_i sea negativo, positivo o cero. Como al menos una componente y_i es positiva, sabemos que por lo menos una de estas componentes debe crecer. Luego, si escogemos un $\in$ tal que $\in=\min\left\{\frac{x_i}{y_i}/\,y_i>0\right\}$ habremos generado una solución posible con a lo más (p -1) componentes positivas.

(b) Sea $x^T=(x_1,...,x_n)$ una solución posible óptima o sea que $cx^T=z_0$ es el máximo de la función objetivo misma, y supongamos que contiene exactamente p variables positivas $x_1,...x_p$. Por lo que tendremos que $x_1A_1+...+x_pA_p=b$ nuevamente separamos en dos casos.

Caso 1: $A_1,...A_p$ son linealmente independientes. Esta situación es semejante a la del caso (a), donde $p \leq m$. Cuando $p = m$, el rango de *A* será *m* y como es linealmente independiente, eso implica que x^T es una solución posible básica y como $cx^T = z_0$ y es el máximo, esto implica que x^T es una solución óptima básica. Ahora bien, cuando *p* < *m* y el rango de *A* es *m*, es posible encontrar (*m* – *p*) vectores columnas de *A*, entre las (*n* – *p*) restantes, de manera que junto a las *p* que tenemos, formen un conjunto de *m* vectores linealmente independientes. Si damos valor cero a las variables asociadas de a dichas (*m* – *p*) columnas, habremos conseguido una solución posible básica, pero solamente en los x_{p+1} vectores, ya que hasta x_p esta la solución óptima posible, es decir $x_1A_1 + ... + x_pA_p + 0A_{p+1} + 0A_{n-p} = b$, por lo que volveríamos al caso anterior, entonces es una solución óptima básica.

Caso 2: $A_1,...A_p$ son linealmente dependientes. Esta situación también es similar a la anterior del caso 2 para (a), la diferencia es que ahora debemos demostrar que para cualquier $\in$ todo vector $(x - \in y)$ que cumpla con la restricción de no negatividad es una solución óptima. El valor de la función objetivo asociado con la solución $(x - \in y)$ es $(cx - \in cy)$. Para $\in$ suficientemente pequeño, $(x - \in y)$ es solución posible para los valores de $\in$ tanto negativas como positivas, donde debe cumplirse que *cy* = 0, pues si $cy \neq 0$, un $\in$ pequeño y con signo apropiado, permitiría obtener una solución posible tal que $c(x - \in y) > cx$, lo cual contradice la suposición inicial que *x* es una solución óptima. Luego, procediendo igual que en el caso 2 para (b) anterior, esto asegura que las nuevas soluciones posibles, con un menor número de componentes positivas, también deben ser óptimas.

Teorema 2

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar, donde A es una matriz m x n de rango m y b un vector m. Sea F el politopo convexo que consiste en todos los n – vectores x que satisface

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Un vector x es solución básica factible si y sólo si x es un punto extremo de F.

Demostración

Demostrando si x es solución básica factible entonces es un punto extremo.

Si x es solución básica factible, como máximo tiene m variables mayores que cero. Para facilitar la notación supongamos que son las m primeras. Entonces, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$

Supongamos que existe dos puntos $x_1, x_2 \in F$, tales que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \quad 0 < \lambda < 1$

Sean $x_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}$ y $x_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$

donde $y_i, \quad i=1,2$ es de dimensión *m* x 1, e $y'_i, \quad i=1,2$ es de dimensión

(*n* – *m*) x 1 . Entonces, de la igualdad $\begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}$

se deduce $0 = \lambda y'_1 + (1-\lambda) y'_2$

Por ser $y'_1, y'_2 \geq 0, \quad \lambda > 0 \ y \ 1-\lambda > 0$, se tiene $y'_1 = y'_2 = 0$

De lo anterior se deduce que las soluciones x, x_1 y x_2 son básicas y asociadas a la misma base, por lo tanto, $x_B = x_1 = x_2$

Concluimos que no existen dos puntos distintos x_1 y x_2 del conjunto de soluciones que permitan escribir x como combinación lineal convexa restringida y, en consecuencia, x es un punto extremo.

Demostrando si x es un punto extremo, entonces es solución básica factible.

Supongamos que x tiene k primeras componentes positivas y el resto son cero. Entonces el sistema de restricciones se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i = b$$

Para ver que x es solución básica factible, es probar que los vectores $a_i, \quad i = 1,...,k$, son linealmente independientes. En caso contrario, existirían escalares $\alpha_1,...,\alpha_k$ no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0$

Sea $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, 0, ..., 0)$

Si se definen $x_1 = x + \in \alpha \quad y \quad x_2 = x - \in \alpha$

se puede elegir adecuadamente el valor de $\in$ para que los puntos sean factibles. Además, se verifica que $x_1 \neq x_2$ y $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ de donde se deduciría que x no es un punto extremo.

Teorema 3

Sea el modelo de programación lineal, en su forma estándar

Max (o Min) $z = c^T x$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

El valor óptimo de la función objetivo se encuentra en un punto extremo del conjunto F.

Demostración

Supongamos que tenemos una solución óptima x* que no es un punto extremo y que $z^* = c^T x^*$ es el valor óptimo del problema. Entonces, verifica que para todo $x \in F$

$$z = c^T x \leq c^T x^* = z^*$$

Sean $\{x_1, ..., x_k\}$ el conjunto de los puntos extremos de *F*. Todo punto de la región *F*, en particular el punto x^* , se puede escribir como combinación lineal convexa de los puntos extremos.

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Entonces, $z^* = c^T x^* = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x_i$

Dado que se verifica $\max_i c^T x_i \geq c^T x_i, \quad i = 1,\ldots,k$ entonces

$$z^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x_i \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \max_i c^T x_i = \max_i c^T x_i \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_i c^T x_i \leq z^*$$

Como consecuencia, $z^* = \max_i c^T x_i$ y se concluye que el óptimo se alcanza en un punto extremo.

Teorema 4

Sea $S = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$, donde *A* es una matriz m x n de rango m, y *b* es un vector de dimensión m. Un punto *x* es punto extremo *S* si y sólo si *A* puede descomponerse en $[B \quad N]$ tal que $x = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ donde B es una matriz de dimensión m x m invertible que satisface $B^{-1}b \geq 0$

Demostración

Si $B^{-1}b \geq 0, \quad x \geq 0$. Además, $Ax = 0$, tal que *x* es un extremo de S. Ahora mostraremos que *x* es de hecho un punto extremo.

Supongamos que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y x_1, x_2 son puntos de S. Note que n – m -1 componentes de *x* son iguales a cero, los componentes correspondiente de x_1 *y* x_2 también deben ser igual a cero. Así, x_1 *y* x_2 puede escribirse como:

$$x_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

Note que $Ax_1 = Ax_2 = 0$, se puede verificar fácilmente que $x_{11} = x_{21} = B^{-1}b$. Así, $x_1\ y\ x_2$ son no distintas, lo que implica que *x* es un punto extremo. Ya que $\bar{x}$ es un múltiplo positivo de *x*, es también un punto extremo.

Si suponemos que $\bar{x}$ es un punto extremo de S. Sin perder la generalidad, supongamos que

$$\bar{x} = \left(\bar{x}_1,...,\bar{x}_k,0,...,x_j,...,0\right)^T$$

donde $\bar{x} > 0$ para $i = 1,...,k$ y para $i = j$. Decimos que $a_1,...,a_k$ son linealmente independiente.

Por contradicción, supongamos que este no es el caso, entonces existirían escalares $\lambda_1,...,\lambda_k$ no todos ceros tal que $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i = 0$. Sea $\lambda = \left(\lambda_1,...,\lambda_k,0,...,0\right)^T$ y elegimos $\alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que ambos $x_1 = \bar{x} + \alpha\lambda$ y $x_2 = \bar{x} - \alpha\lambda$ son no negativos.

Note que $Ax_1 = A\bar{x} + \alpha A\lambda = 0 + \alpha\sum_{i=1}^{k} a_i\lambda_i = 0$

Similarmente, $Ax_2 = 0$ Ya que $x_1, x_2 \geq 0$, son ambos puntos de S. Tenga en cuenta también que son distintos, ya que $\alpha > 0 \quad y \quad \lambda \neq 0$.

Además, $\bar{x} = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ contradiciendo el supuesto que $\bar{x}$ es un punto extremo. Así $a_1,...,a_k$ son linealmente independientes, y además el rango de A es igual a m, esto es claro que $k \leq m$. Entonces debe existir m – k vectores de entre el conjunto de vectores $\{a_i : i = k+1,...,n; i \neq j\}$ que junto con $a_1,...,a_k$, forme un conjunto de m vectores linealmente independientes.

Sin perder la generalidad, supongamos que esos vectores son $a_{k+1},...,a_m$. Denotemos $[a_1,...,a_k]$ para *B*, donde *B* es invertible.

Así $0 = A\bar{x} = B\hat{x} + b\overline{x_j}$, donde $\hat{x}$ es un vector del primer componente m de $\bar{x}$. Por los tanto, $\bar{x} = \overline{x_j} B^{-1} b$ y por lo tanto el vector $\bar{x}$ es de la forma $\hat{x} = \overline{x_j} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$. Note que $\bar{x} \geq 0,$ $\overline{x_j} > 0,$ $B^{-1}b > 0$, lo que queda demostrado.

Proposición 1

El conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Demostración

Sean x_1 y x_2 soluciones factibles, entonces $Ax_1 = b, \quad Ax_2 = b, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Si formamos un vector *x* que sea combinación lineal de éstos dos:

$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad Ax = \alpha Ax_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$

Por lo que *x* es también solución factible.

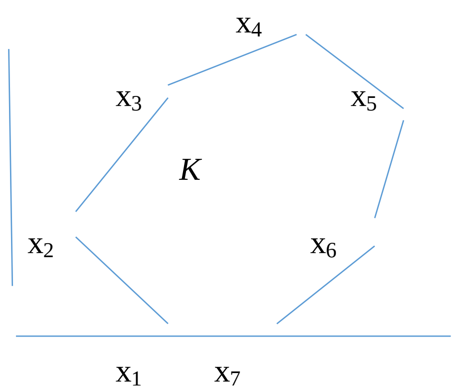
Proposición 2

Si K es un poliedro convexo, entonces la función objetivo z alcanza un mínimo en un vértice de K.

Demostración

Designemos por K el conjunto de las soluciones factibles de un problema de programación lineal.

Sean $x_1, x_2, \ldots x_p$ los vértices de K y sea x_0 una solución factible mínima, esto significa que $c^T x_0 \leq c^T x$ para cada $x \in K$



Se puede dar los casos siguientes:

a) Si x_0 es un vértice de K, ya estaría demostrado.

b) Si x_0 no es un vértice de K, entonces x_0 se podrá poner como una combinación lineal convexa de ellos:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i ; \quad \alpha_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

Sustituyendo: $\min z = m = c^T x_0 = c^T (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p)$

Supongamos que $c^T x_1 = \min c^T x_i$

$$m \geq c^T (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1 + \ldots + \alpha_p x_1) = c^T x_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) = c^T x_1 \geq m$$

por consiguiente $c^T x_1 = m$, es decir, que existe un vértice de K en el que la función objetivo $z = c^T x$ alcanza su valor mínimo.

Para probar la segunda parte de la propiedad supongamos que *z* alcanza su valor mínimo en $x_1, x_2, \ldots x_q$ y que *x* es una combinación lineal convexa de ellos:

$$x = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i x_i; \quad \alpha_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$$

$$c^T x = c^T \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_q x_q \right) = \alpha_1 c^T x_1 + \alpha_2 c^T x_2 + \ldots + \alpha_q c^T x_q =$$
$$= \left(m\alpha_1 + m\alpha_2 \ldots + m\alpha_q \right) = m\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \right) = m$$

lo cual la proposición queda demostrada.

Proposición 3

Si tenemos un conjunto de *k* vectores $A_1, A_2, \ldots, A_k$, que sean linealmente independientes y de forma que: $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_k A_k = b$ con las $x_i \geq 0$, entonces, el punto $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0 \right)^T$ es un vértice del conjunto convexo *K* de soluciones factibles.

Demostración

Supongamos que *X* no fuera vértice, entonces podría expresarse como una combinación lineal convexa de dos puntos distintos de *K*.

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2, \quad \alpha \in [0,1], \quad X_1, X_2 \in K$$

Puesto que las coordenadas de las soluciones factibles son no negativas y deberá ocurrir que la *n* – *k* coordenadas últimas de X_1 y X_2 fueran iguales a cero:

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k}, 0, ..., 0)^T$$
$$X_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2k}, 0, ..., 0)^T$$

con $X_1 \neq X_2$. Además, por ser soluciones factibles, se cumple que $AX_1 = b$ y $AX_2 = b$, por lo que podemos escribir:

$$x_{11}A_1 + x_{12}A_2 + ... + x_{1k}A_k = b$$
$$x_{21}A_1 + x_{22}A_2 + ... + x_{2k}A_k = b$$

Restando las expresiones anteriores obtenemos:

$$(x_{11} - x_{21})A_1 + (x_{12} - x_{22})A_2 + ... + (x_{1k} - x_{2k})A_k = 0$$

y por ser los vectores $A_1, A_2, ..., A_k$ linealmente independientes llegamos a la conclusión de que:

$$x_{11} = x_{21}$$
$$x_{12} = x_{22}$$
$$...$$
$$x_{1k} = x_{2k}$$

es decir, que $X_1 = X_2$, lo que contradice el hecho de haber supuestos $X_1 \neq X_2$, por lo que necesariamente *X* debe ser el vértice de *K*.

Teorema 5

Sea P un problema primal de programación lineal, y D su dual. Sea *x* una solución factible de P e *y* una solución factible de D. Entonces

$$b^T y \leq c^T x$$

Demostración

Si *x* e *y* son factibles respectivamente para P y D, entonces

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad A^T y \leq c$$

Obsérvese que debido a la no negatividad de x,

$$b^T y = x^T A^T y \leq x^T c = c^T x$$

Teorema 6

Dados un par de problemas primal – dual, si uno de ellos admite solución óptima, entonces el otro también la admite y los respectivos valores óptimos son iguales.

Demostración

Sea x^* solución óptima del primal y λ^* solución óptima del dual.

$\exists(x^*, \lambda^*) \leftrightarrow S \neq \phi \quad \wedge \quad S' \neq \phi$ donde S es el conjunto de oportunidades primal y S^* es el conjunto de oportunidades dual.

$$\exists x^* \leftrightarrow \exists \lambda^* / z(x^*) = z(\lambda^*)$$